BULLETIN DE LA S. M. F.

L. AUTONNE

Sur les groupes linéaires, réels et orthogonaux

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 121-134
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__121_1>

SUR LES GROUPES LINÉAIRES, RÉELS ET ORTHOGONAUX;

Par M LÉON AUTONNE.

Considérons un groupe G_x de substitutions linéaires n-aires, de déterminant *un* $[j, k = 1, 2, \ldots, n]$,

$$A = \left| x_j \sum_k a_{jk} x_k \right| = |x_j \, A[x_j]| = |x \, A[x]|.$$

Supposons que les substitutions A soient : 1° réelles, les coefficients a_{jk} étant réels; 2° orthogonales, admettant pour invariant absolu la somme des carrés des variables. On dira que G_x est un groupe linéaire réel et orthogonal.

Changeons de variables, en posant symboliquement $x = r[t]$, c'est-à-dire, en notation ordinaire,

$$x_j = \sum_k r_{jk} t_k.$$

Le nouveau groupe Γ_t, qui est d'ailleurs $r^{-1} G r$, n'est, en général, plus ni réel, ni orthogonal. Γ_t n'est cependant pas quelconque, car, pour un changement convenable de variables, $t = r^{-1}[x]$, il redevient réel et orthogonal. J'exprimerai plus brièvement cette propriété en disant que Γ_t est *réalisable* et admet la substitution r pour *réalisante*.

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un groupe n-aire Γ_t soit réalisable?

La présente Note fournit la réponse complète à la question.

Mon Mémoire *Sur l'Hermitien* (*Rendiconti du Cercle Mathématique de Palerme,* 1902) contient, sur les substitutions linéaires, des considérations d'où la solution de notre problème se déduit assez simplement. Je vais me référer très fréquemment à ce travail; j'y renverrai pour la notation (*loc. cit.,* n° 7), par exemple.

Rappelons brièvement les principales théories dont on va faire usage.

Soit une *matrice* ou Tableau de n^2 coefficients,

$$[j,\ k = 1, 2, \ldots, n],$$

$$A = [a_{jk}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ de déterminant } |A| = 1.$$

La matrice $A' = [a_{kj}]$ est la *transposée* de A. $\overline{g}$ étant la conjuguée de l'imaginaire g, on pose $\overline{A} = [\overline{a}_{jk}]$ (*loc. cit.,* n° 1).

La matrice A définit, sans ambiguïté (*loc. cit.,* n° 2), une *forme bilinéaire*

$$A(x, y) = \sum_{jk} A_{jk} y_j x_k$$

et une *substitution*

$$A = \left| x_j \quad \frac{\partial A(x, y)}{\partial y_j} \right| = | x \quad A[x] |.$$

La matrice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \ddots \end{pmatrix}$$

définit la forme bilinéaire $E(x, y) = \sum xy$ et la substitution *unité*.

La même lettre A peut désigner la matrice, la forme bilinéaire et la substitution. Les formules du calcul symbolique (Frobenius, *J. f. r. u. a. m.,* t. 84, p. 1) sont ainsi susceptibles (*loc. cit.,* n° 4) d'une triple interprétation.

Si l'on pose $x = L[\xi]$, $y = M[\eta]$, les formes bilinéaires

$$A(x, y) \quad \text{et} \quad A(x, \bar{x})$$

deviennent respectivement (*loc. cit.*, n° 5)

$$M'AL(\xi, \eta) \quad \text{et} \quad \bar{L}'AL(\xi, \bar{\xi}).$$

Une matrice, forme bilinéaire ou substitution, A est

	symétrique,	si	$A' = A$;
	réelle,	si	$\bar{A} = A$;
	orthogonale,	si	$A'A = E$;
	unitaire,	si	$\bar{A}'A = E$;
enfin	*hermitienne,*	si	$\bar{A}' = A$,

l'expression $A(x, \bar{x})$ devant être, de plus, dans ce dernier cas, un *hermitien,* c'est-à-dire toujours positive.

Les matrices réelles, orthogonales ou unitaires forment évidemment un groupe réel, orthogonal ou unitaire.

Si A est hermitienne, il existe (*loc. cit.*, n° 25) une, et une seule, hermitienne $a = A^{\frac{1}{2}}$ telle que $a^2 = A$. Si un groupe G admet pour invariant absolu un hermitien $H(x, \bar{x})$, le groupe transformé

$$H^{\frac{1}{2}} G H^{-\frac{1}{2}}$$

par l'hermitienne $H^{-\frac{1}{2}}$ est unitaire (*loc. cit.*, n° 31).

Tout cela rappelé, voici la proposition qui résout le problème :

Théorème. — *Pour qu'un groupe* n-*aire* Γ_t *puisse, par un choix convenable de variables, être rendu réel et orthogonal, les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes :*

I. Γ_t *possède deux invariants absolus, un hermitien* $H(t, \bar{t})$ *et une forme quadratique* n-*aire*

$$[p_{jk} = p_{kj}] \qquad P = \sum_{jk} p_{jk} t_j t_k$$

de déterminant un.

II. Γ_t *ayant été rendu unitaire* (*en le transformant par* *l'hermitienne* $H^{-\frac{1}{2}}$), *dans l'expression transformée* P *la matrice* $P = [p_{jk}]$ *symétrique est unitaire.*

Si Γ_t possède plus d'une réalisante, les divers groupes G_x, $\mathfrak{G}_y$, ... réels et orthogonaux, auxquels on ramène Γ_t, sont les transformés l'un de l'autre par des substitutions réelles et orthogonales. On peut donc ne pas considérer G_x, $\mathfrak{G}_y$, ... comme distincts. Il suffira de se procurer, d'une manière quelconque, une seule réalisante.

Je construis effectivement cette dernière dans le cas particulier, assez étendu du reste, où, dans le groupe Γ_t, une substitution A au moins a toutes les racines de son équation caractéristique

$$|\rho E - A| = 0$$

distinctes.

Un résumé des présentes recherches a été inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 17 mars 1902.

Je passe maintenant à la démonstration du théorème.

1. Je ne considère pas comme distincts deux groupes réels et orthogonaux, transformés l'un de l'autre par une substitution réelle et orthogonale.

Je nomme *réalisable* tout groupe n-aire qui devient réel et orthogonal après transformation par une substitution *réalisante* convenablement choisie. Je vais poursuivre la construction des groupes réalisables.

2. Lemme I. — *Des trois propriétés, réalité, unitarité, orthogonalité, que possède éventuellement une matrice* A, *deux quelconques assurent toujours la troisième.*

En effet, des trois relations

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A, && \text{réalité,} \\ A'A &= E, && \text{orthogonalité,} \\ \bar{A}'A &= E, && \text{unitarité,} \end{aligned}$$

deux quelconques assurent toujours la troisième.

Lemme II. — *Toute matrice est le produit d'une unitaire par une hermitienne.*

Soit la matrice A. La matrice $\overline{A}'A$ est hermitienne (*loc. cit.*, n° 27) et sa racine carrée h (*loc. cit.*, n° 25) aussi est hermitienne. On a

$$\overline{A}'A = h^2 \qquad \text{et} \qquad h^{-1}\overline{A}'A h^{-1} = E \qquad \text{ou} \qquad \overline{(A h^{-1})}'A h^{-1} = E.$$

La matrice $A h^{-1} = u$ est donc unitaire et il vient

$$A = uh. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On a du reste aussi

$$A^{-1} = h^{-1}u^{-1}.$$

h^{-1} est hermitienne (*loc. cit.*, n° 24) et u^{-1} est unitaire. On peut donc dire aussi que toute matrice est le produit d'une hermitienne par une unitaire.

3. Considérons maintenant un groupe Γ_t, exprimé en n variables $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Par hypothèse, Γ_t est réalisable et, posant

$$t = r^{-1}[x],$$

on a un groupe G_x, exprimé en n variables $x_1, \ldots, x_n$, lequel G_x est réel et orthogonal. La substitution r^{-1} sera dite *réalisante*.

G_x, étant réel et orthogonal, admet deux invariants absolus, savoir :

I. L'hermitien $E(x, \overline{x}) = \sum x\overline{x}$ (car toute substitution de G_x, étant réelle et orthogonale, est aussi unitaire, par le lemme I du 2°);

II. Le polynome quadratique $E(x, x) = \sum x^2$.

En vertu de la relation précédente

$$t = r^{-1}[x] \qquad \text{ou} \qquad x = r[t],$$

l'hermitien $E(x, \overline{x})$ devient l'hermitien $\overline{r}'r\,(t, \overline{t})$ et le polynome quadratique $E(x, x)$ devient le polynome quadratique

$$r'r(t, t) = \sum_{jk} p_{jk}t_j t_k = P(t, t),$$

où P désigne la matrice symétrique

$$\{k, j = 1, 2, \ldots, n\} \qquad P = [p_{jk}] = [p_{kj}].$$

4. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant : *Tout groupe réalisable* Γ_t *possède deux invariants absolus, un hermitien et une forme quadratique.*

Cherchons si la réciproque est vraie.

5. Je dis que l'on peut, sans restreindre la généralité, n'envisager que des groupes réalisables Γ_t unitaires.

r étant une réalisante, posons, conformément au lemme II du n° 2,

$$r = uh.$$

L'invariant absolu hermitien, qui est, d'après le n° 3, $\bar{r}' r(t, \bar{t})$, devient

$$h^2(t, \bar{t}).$$

Transformons Γ_t par l'hermitienne h^{-1}. L'hermitien $h^2(t, \bar{t})$ devient l'hermitien $E(t, \bar{t})$ et, par conséquent, Γ_t devient unitaire.

C'est ce que je supposerai toujours dorénavant.

Cela revient à supposer unitaires la réalisante r, pour que $\bar{r}' r$ puisse être identique à E, et aussi la matrice symétrique $P = r'r$ (n° 3).

6. Nous allons montrer que *tout groupe unitaire* Γ_t *qui admet pour invariant absolu une forme quadratique*

$$\sum_{jk} p_{jk} t_j t_k, \qquad p_{jk} = p_{kj},$$

où la matrice symétrique

$$P = [p_{jk}]$$

est unitaire, est réalisable.

Il suffira évidemment de construire une réalisante.

Cette proposition est bien la réciproque de celle du n° 4, car le second invariant absolu est déjà, par unitarité, l'hermitien $E(t, \bar{t})$.

7. La matrice unitaire symétrique P admet une canonisante (*loc. cit.*, n° 22) unitaire λ et a pour forme canonique P_0,

$$P = \lambda^{-1} P_0 \lambda,$$
$$P_0 = |t_j, \quad c_j t_j|,$$

où $|c_j| = 1$ (*loc. cit.*, n° 20, *in fine*).

Mettons en évidence les c_j égaux; on écrira, $i=\sqrt{-1}$,

$$\begin{gathered}
c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_m = e^{i\varphi},\\
c_{m+1} = c_{m+2} = \ldots = c_{m+m'} = e^{i\psi},\\
c_{m+m'+1} = \ldots = c_{m+m'+m''} = e^{i\omega},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{gathered}$$

φ, ψ, ω, ... étant des arcs réels, tous distincts, compris entrr o et 2π.

On vérifiera sans peine la proposition suivante :

Lemme. — *Pour qu'une substitution* n*-aire* Λ *soit échangeable à* P_0, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$\Lambda = L_m L_{m'} L_{m''} \ldots,$$

où L_m, $L_{m'}$, $L_{m''}$, ... *sont respectivement une m-aire, une m'-aire, une m''-aire, ... quelconques, effectuées, savoir, respectivement,*

$$\begin{array}{llllll}
L_m & \text{sur} & t_1, & t_2, & \ldots, & t_m;\\
L_{m'} & \text{sur} & t_{m+1}, & & \ldots, & t_{m+m'};\\
L_{m''} & \text{sur} & t_{m+m'+1}, & & \ldots, & t_{m+m'+m''};\\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots, & & \ldots, & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Ce lemme résulte immédiatement de théories, bien connues, de M. Jordan.

8. Sont symétriques : P par hypothèse et P_0 comme canonique. Il vient (n° 7)

$$P = \lambda^{-1} P_0 \lambda = P' = \lambda' P_0 \lambda'^{-1}, \qquad P_0 = \lambda\lambda' P_0 (\lambda\lambda')^{-1};$$

$\lambda\lambda'$ est échangeable à P_0 et l'on écrira

$$\Lambda = \lambda\lambda',$$

Λ ayant l'expression qui figure au lemme du n° 7.

9. Considérons maintenant la canonique unitaiee

$$\theta_0 = | t_j, \quad d_j t_j |,$$

où (*voir* n° 7)

$$\begin{aligned} d_1 = d_2 = \ldots = d_m &= e^{\frac{i\varphi}{2}}, \\ d_{m+1} = d_{m+2} = \ldots = d_{m+m'} &= e^{\frac{i\psi}{2}}, \\ d_{m+m'+1} = \ldots = d_{m+m'+m''} &= e^{\frac{i\omega}{2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \end{aligned}$$

les arcs $\frac{\varphi}{2}, \frac{\psi}{2}, \frac{\omega}{2}, \ldots$ sont tous inégaux.

On a évidemment $\Theta_0^2 = P_0$ et Λ est échangeable à Θ_0.

Posons

$$\Theta = \lambda^{-1}\Theta_0\lambda, \quad \text{comme} \quad P = \lambda^{-1}P_0\lambda;$$

on a aussi

$$\Theta^2 = P.$$

Je dis que Θ est *symétrique*.

Considérons, en effet,

$$\Theta'\Theta^{-1} = \lambda'\Theta_0\lambda'^{-1}\lambda^{-1}\Theta_0^{-1}\lambda = \lambda'\Theta_0\Lambda^{-1}\Theta_0^{-1}\lambda$$

et, comme $\Lambda = \lambda\lambda'$ est échangeable à Θ_0,

$$\Theta'\Theta^{-1} = \lambda'\Lambda^{-1}\lambda = E \quad \text{et} \quad \Theta' = \Theta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

10. On reprendra donc un groupe unitaire Γ_t ayant pour invariant absolu quadratique l'expression

$$P(t, t),$$

où la matrice unitaire symétrique $P = \Theta^2$.

Posons

$$t = \Theta^{-1}[x] \quad \text{ou} \quad x = \Theta[t];$$

Γ_t se transforme en un groupe unitaire G_x, lequel admet pour invariant quadratique l'expression

$$\Theta'^{-1}P\Theta^{-1}(x, x) = \Theta^{-1}\Theta^2\Theta^{-1}(x, x) = E(x, x) = \sum x^2.$$

G_x est orthogonal; il est déjà unitaire, donc (lemme I du n° 2) G_x est réel. Γ_t est réalisable et Θ est une réalisante.

11. Nous avons, au n° 5, rendu Γ_t unitaire, en le transformant par l'hermitienne h^{-1}, h étant la racine carrée de son hermitien,

invariant absolu,

$$H(t, \bar{t}) = \bar{r}' r(t, \bar{t}).$$

Nous pouvons donc résumer toute la discussion précédente dans un théorème qui est la proposition annoncée au commencement du présent travail.

Théorème. — *Pour qu'un groupe n-aire Γ_t puisse, par un choix convenable de variables, être rendu orthogonal et réel, les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes :*

1° *Γ_t possède deux invariants absolus, un hermitien* $H(t, \bar{t})$ *et une forme quadratique* n-*aire, de déterminant* un,

$$P = \sum_{jk} p_{jk} t_j t_k, \qquad p_{jk} = p_{kj};$$

2° *Γ_t ayant été rendu unitaire $\left(\text{en le transformant par l'hermitienne } H^{-\frac{1}{2}}\right)$ dans l'expression transformée,* P, *la matrice* n-*aire symétrique*

$$P = [p_j k]$$

est unitaire.

12. Γ_t satisfaisant aux conditions du théorème, nous avons construit la réalisante Θ, laquelle est connue dès qu'on possède la matrice P et une de ses canonisantes.

Existe-t-il pour Γ_t encore d'autres réalisantes?

Supposons qu'il en existe deux, r et s, de façon qu'en posant

$$x = r[t], \qquad y = s[t],$$

on obtienne deux groupes G_x et $\mathfrak{G}_y$, tous deux réels et orthogonaux.

On aura (n° 3)

$$P(t, t) = r' r(t, t) = s' s(t, t), \qquad r'^{-1} s' s r^{-1} = (sr^{-1})' sr^{-1} = 1;$$

la matrice $u = sr^{-1}$ est orthogonale. D'ailleurs, $y = u[x]$.

Je dis que *u est réelle*. Il suffira (lemme I du n° 2) de montrer que u est unitaire. Or, cela est évident, car u, transformant l'un dans l'autre les groupes réels et orthogonaux G_x et $\mathfrak{G}_y$, transforme l'un dans l'autre les deux hermitiens $E(x, \bar{x})$, et $E(y, \bar{y})$.

u étant réelle et orthogonale, les groupes G et $\mathfrak{G}$ ne sont pas distincts (n° 1).

Il est donc inutile de chercher d'autres réalisantes que Θ.

Il suffira même de se procurer une réalisante r quelconque.

La manière la plus simple d'avoir r est de poser $x = r(t)$ de façon que l'expression $\sum x^2$ s'identifie avec le polynome quadratique P en $t_1, \ldots, t_n$. r, bien entendu, doit être unitaire.

Alors, en effet, en transformant Γ_t par r^{-1}, on a un groupe G_x qui est unitaire, comme Γ_t, et, de plus, orthogonal; donc, G_x est aussi réel.

13. Le calcul effectif d'une réalisante unitaire ne présente aucune difficulté dans un cas particulier, assez étendu du reste. C'est lorsque le groupe réalisable unitaire Γ_t possède au moins une substitution A, pour laquelle l'équation caractéristique

$$f(\varphi) = |\rho E - A| = 0$$

a ses n racines distinctes. Le polynome $f(\rho)$ est évidemment à coefficients réels.

Ces racines sont, par unitarité, de la forme $e^{i\alpha}$. A cause de la réalité du polynome $f(\rho)$, s'il y a une racine $e^{i\alpha}$, il y aura une racine $e^{-i\alpha}$. Tous les arcs réels α et $-\alpha$ sont distincts. Aucun d'eux n'est égal à π, car l'équation caractéristique, en vertu de $|A| = 1$, possède la racine -1 avec un degré pair de multiplicité.

Nous supposerons A mise sous forme canonique et nous distinguerons deux cas :

$$n = 2m \quad = \text{pair},$$
$$n = 2m + 1 = \text{impair}.$$

14. Prenons $n = 2m$. Eu égard à ce qui vient d'être dit, on peut écrire

$$A = \begin{vmatrix} y_l & y_l e^{i\alpha_l} \\ z_l & z_l e^{-i\alpha_l} \end{vmatrix} \qquad l = 1, 2, \ldots, m,$$

où

$$t_1 = y_1, \qquad t_2 = z_1, \qquad t_3 = y_2, \qquad t_4 = z_2, \qquad \ldots;$$

les arcs α sont tous distincts; aucun d'eux n'est ni 0 ni π.

Le polynome quadratique P est un invariant absolu vis-à-vis de A. On vérifie de suite que

$$P = 2\sum_l p_l y_l z_l$$

et l'on a la matrice symétrique

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 0 & . & \dots \\ p_1 & 0 & 0 & 0 & . & \dots \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & . & \dots \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & . & \dots \\ . & . & . & . & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse,

$$1 = |P| = (-1)^m \prod_l p_l^2.$$

(1)
$$\prod_l p_l^2 = (-1)^m.$$

Par unitarité on a, par un calcul facile,

$$\bar{P}'P = \begin{pmatrix} |p_1|^2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & |p_2|^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & |p_3|^2 & \dots \end{pmatrix} = E$$

$$1 = |p_1| = |p_2| = \dots = |p_m|,$$

(2)
$$p_l = e^{i\varpi_l},$$

$\varpi_l =$ arc réel compris entre 0 et 2π. Eu égard à (1), on a

$$2\sum_l \varpi_l = m\pi = 2M\pi, \qquad M = \text{entier}.$$

15. Introduisons maintenant une transformation

$$t = q[x], \qquad |q| = 1$$

en posant

$$y_l = \mu_l \frac{x_l + ix'_l}{\sqrt{2}}, \qquad z_l = \mu_l \frac{ix_l + x'_l}{\sqrt{2}}.$$

La condition $|q| = 1$ donne

(3)
$$\prod_l \mu_l^2 = 1,$$

et l'unitarité donne, par un calcul aisé,

$$1 = \mu_l \bar{\mu}_l = |\mu_l|^2, \qquad |\mu_l| = 1, \qquad \mu_l = e^{i\varphi_l}.$$

Le polynome P devient

$$P_1 = \sum_l p_l \mu_l^2 (x_l^2 + x_l'^2).$$

q est une réalisante dès que P_1 est, à un facteur constant K près, la somme des carrés des variables x et x' (n° **12**). Il faut donc déterminer les paramètres μ par la condition

$$(4) \qquad K = p_l \mu_l^2 = e^{i(\varpi_l + 2\varphi_l)};$$

sous le bénéfice de (3), (4) donne

$$\prod_l p_l = K^m,$$

et, eu égard à (1),

$$(5) \qquad K^{2m} = (-1)^m.$$

Si m est pair, on prendra, pour avoir (4),

$$K = 1, \qquad \varphi_l = -\frac{\varpi_l}{2}.$$

Si m est impair, on prendra, à cause de (4),

$$K = i, \qquad \varphi_l = -\frac{\varpi_l}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

La réalisante est construite.

16. Supposons enfin que n est impair, $n = 2m + 1$.

On écrira, eu égard aux explications du n° **13**, et remarquant que 1 est racine de l'équation caractéristique,

$$A = \begin{vmatrix} t_0 & t_0 \\ y_l & y_l e^{i\alpha_l} \\ z_l & z_l e^{-i\alpha_l} \end{vmatrix} \qquad l = 1, 2, \ldots, m,$$

$y_1 = t_1$, $z_1 = t_2$, $y_2 = t_3$, ...; les arcs réels α sont tous distincts, compris entre 0 et 2π et $\neq 0, 2\pi$ ou π.

Comme au n° **14**, on voit que le polynome P est

$$P = p_0 t_0^2 + 2\sum p_l y_l u_l;$$

la matrice P est

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & p_1 & \dots \\ 0 & p_1 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix},$$

$$1 = |P| = p_0(-1)^m \prod_l p_l^2,$$

(6) $$\prod_l p_l^2 = (-1)^m p_0^{-1}.$$

Par unitarité,

$$1 = p_0\bar{p}_0 = |p_0|^2 = p_l\bar{p}_l = |p_l|^2,$$
$$|p_0| = |p_l| = 1, \qquad p_0 = e^{i\varpi_0}, \qquad p_l = e^{i\varpi_l},$$

les arcs ϖ étant compris entre 0 et 2π. Eu égard à (6),

$$\varpi_0 + 2\sum_l \varpi_l = m\pi + 2M\pi, \qquad M = \text{entier}.$$

17. Introduisons maintenant une transformation

$$t = q[x], \qquad |q| = 1,$$

en posant

$$t_0 = \mu_0 x_0,$$
$$y_l = \mu_l \frac{x_l + ix'_l}{\sqrt{2}}, \qquad z_l = \mu_l \frac{ix_l + x'_l}{\sqrt{2}}.$$

La condition $|q| = 1$ donne

(7) $$1 = \mu_0 \prod_l \mu_l^2, \qquad \prod_l \mu_l^2 = \mu_0^{-1}.$$

L'unitarité donne

$$1 = \mu_0\bar{\mu}_0 = |\mu_0|^2 = \mu_l\bar{\mu}_l = |\mu_l|^2,$$
$$|\mu_0| = |\mu_l| = 1; \qquad \mu_0 = e^{i\varphi_0}, \qquad \mu_l = e^{\varphi_l i}.$$

Le polynome P devient

$$P_1 = p_0\mu_0^2 x_0^2 + i\sum_l p_l \mu_l^2 (x_l^2 + {}^2x'_l).$$

q est une réalisante dès que

(8) $$p_0\mu_0^2 = ip_l\mu_l^2 = e^{i(\varpi_0 + 2\varphi_0)} = ie^{i(\varpi_l + 2\varphi_l)}.$$

Eu égard à (6) et (7), il vient

$$p_0^m \mu_0^{2m} = i^m \mu_0^{-1} \prod_l p_l, \qquad i^m \prod_l p_l = p_0^m \mu_0^{2m+1},$$

$$(p_0 \mu_0^2)^{2m+1} = 1. \tag{9}$$

On prendra $p_0 \mu_0^2 = 1$, et, pour satisfaire à (8),

$$\varphi_0 = -\frac{\varpi_0}{2}, \qquad \varphi_l = -\frac{\varpi_l}{2}.$$

18. Si, dans toute substitution du groupe réalisable, l'équation caractéristique a des racines multiples, le calcul d'une réalisante est analogue, mais beaucoup plus compliqué.