BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur un groupe de transformations

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 155-165

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__155_1>

SUR UN GROUPE DE TRANSFORMATIONS;

Par M. E. Goursat.

1. Dans son Mémoire *Sur la transformation des fonctions abéliennes* (*Comptes rendus*, 1855) M. Hermite a considéré un groupe de substitutions linéaires, où figurent seize nombres entiers a_i, b_i, c_i, d_i ($i=0, 1, 2, 3$), liées par les six relations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a_0 d_3 + b_0 c_3 - c_0 b_3 - d_0 a_3 = 1, \\ a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 a_2 = 1, \\ a_0 d_1 + b_0 c_1 - a_1 d_0 - b_1 c_0 = 0, \\ a_0 d_2 + b_0 c_2 - a_2 d_0 - b_2 c_0 = 0, \\ a_1 d_3 + b_1 c_3 - a_3 d_1 - b_3 c_1 = 0, \\ a_2 d_3 + b_2 c_3 - a_3 d_2 - b_3 c_2 = 0. \end{array}\right.$$

Ce même groupe joue un rôle important dans un grand nombre de travaux publiés depuis, par exemple dans le Mémoire de M. Picard *Sur les fonctions hyperabéliennes*, et dans les Mémoires de M. Humbert *Sur les fonctions abéliennes*. Quand on applique à une équation aux dérivées partielles du second ordre de Monge-Ampère une transformation de contact, on est conduit à considérer un groupe de substitutions linéaires, dont les coefficients ont exactement la même expression que ceux de M. Hermite, mais où a_i, b_i, c_i, d_i ne sont plus des nombres entiers. Il m'a semblé intéressant de signaler ce rapprochement entre deux parties, en apparence si éloignées, des Mathématiques.

C'est la forme même des conditions (1) qui a été le point de départ de cette remarque. Si, en effet, on pose, dans ces relations,

$$\begin{array}{llll}
a_0 = \dfrac{\partial X}{\partial x}, & b_0 = \dfrac{\partial X}{\partial y}, & c_0 = \dfrac{\partial X}{\partial q}, & d_0 = \dfrac{\partial X}{\partial p}, \\
a_1 = \dfrac{\partial Y}{\partial x}, & b_1 = \dfrac{\partial Y}{\partial y}, & c_1 = \dfrac{\partial Y}{\partial q}, & d_1 = \dfrac{\partial Y}{\partial p}, \\
a_2 = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, & b_2 = \dfrac{\partial Q}{\partial y}, & c_2 = \dfrac{\partial Q}{\partial q}, & d_2 = \dfrac{\partial Q}{\partial p}, \\
a_3 = \dfrac{\partial P}{\partial x}, & b_3 = \dfrac{\partial P}{\partial y}, & c_3 = \dfrac{\partial P}{\partial q}, & d_3 = \dfrac{\partial P}{\partial p},
\end{array}$$

X, Y, P, Q étant des fonctions des quatre variables x, y, p, q, elles deviennent

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{llll}
(X, Y) = 0, & (X, Q) = 0, & (Y, P) = 0, & (P, Q) = 0, \\
 & (P, X) = 1, & (Q, Y) = 1, &
\end{array}\right.$$

la parenthèse (u, v) ayant la signification habituelle

$$(u, v) = \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ces conditions bien connues expriment que

$$P\,dX + Q\,dY - (p\,dx + q\,dy)$$

est une différentielle exacte [1] $d\Omega$, et les formules

$$\begin{aligned}
x' &= X(x, y, p, q), \\
y' &= Y(x, y, p, q), \\
p' &= P(x, y, p, q), \\
q' &= Q(x, y, p, q)
\end{aligned}$$

définissent une transformation de contact en (x, p).

2. Considérons maintenant une transformation de contact

[1] *Voir*, par exemple, mes *Leçons sur les equations aux dérivées partielles du premier ordre*, page 283.

générale définie par les formules

$$(3) \qquad \begin{cases} x' = \mathrm{X}(x, y, z, p, q), \\ y' = \mathrm{Y}(x, y, z, p, q), \\ z' = \mathrm{Z}(x, y, z, p, q), \\ p' = \mathrm{P}(x, y, z, p, q), \\ q' = \mathrm{Q}(x, y, z, p, q), \end{cases}$$

et posons

$$\begin{array}{llll} \dfrac{d\mathrm{X}}{dx} = a_0, & \dfrac{d\mathrm{X}}{dy} = b_0, & \dfrac{\partial\mathrm{X}}{\partial p} = d_0, & \dfrac{\partial\mathrm{X}}{\partial q} = c_0, \\ \dfrac{d\mathrm{Y}}{dx} = a_1, & \dfrac{d\mathrm{Y}}{dy} = b_1, & \dfrac{\partial\mathrm{Y}}{\partial p} = d_1, & \dfrac{\partial\mathrm{Y}}{\partial q} = c_1, \\ \dfrac{d\mathrm{P}}{dx} = a_3, & \dfrac{d\mathrm{P}}{dy} = b_3, & \dfrac{\partial\mathrm{P}}{\partial p} = d_3, & \dfrac{\partial\mathrm{P}}{\partial q} = c_3, \\ \dfrac{d\mathrm{Q}}{dx} = a_2, & \dfrac{d\mathrm{Q}}{dy} = b_2, & \dfrac{\partial\mathrm{Q}}{\partial p} = d_2, & \dfrac{\partial\mathrm{Q}}{\partial q} = c_2, \end{array}$$

où

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\,\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y}\,q + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Les formules (3) définissant une transformation de contact, on a l'identité

$$d\mathrm{Z} - \mathrm{P}\,d\mathrm{X} - \mathrm{Q}\,d\mathrm{Y} = \rho(dz - p\,dx - q\,dy),$$

ρ étant une fonction de x, y, z, p, q, et les conditions

$$\begin{array}{llll} [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = 0, & [\mathrm{X}, \mathrm{Q}] = 0, & [\mathrm{Y}, \mathrm{P}] = 0, & [\mathrm{P}, \mathrm{Q}] = 0, \\ & [\mathrm{P}, \mathrm{X}] = \rho, & [\mathrm{Q}, \mathrm{Y}] = \rho, & \end{array}$$

où $[u, v]$ représente le crochet jacobien

$$[u, v] = \frac{\partial u}{\partial p}\frac{dv}{dx} - \frac{\partial v}{\partial p}\frac{du}{dx} + \frac{\partial u}{\partial q}\frac{dv}{dy} - \frac{\partial v}{\partial q}\frac{du}{dy},$$

peuvent s'écrire, avec une notation abrégée,

$$(4) \qquad \begin{cases} (ad)_{01} + (bc)_{01} = 0, \\ (ad)_{02} + (bc)_{02} = 0, \\ (ad)_{13} + (bc)_{13} = 0, \\ (ad)_{23} + (bc)_{23} = 0, \\ (ad)_{03} + (bc)_{03} = (ad)_{12} + (bc)_{12} = \rho; \end{cases}$$

on a posé

$$(ad)_{ij} = a_i d_j - a_j b_i,$$
$$(bc)_{ij} = b_i c_j - b_j c_i,$$

les indices i, j pouvant prendre les valeurs o, 1, 2, 3. A ces relations on peut en ajouter d'autres de même forme, qui en sont des conséquences *algébriques*. Pour les obtenir facilement, posons, en désignant par u_1, u_2, u_3, u_4 quatre indéterminées,

$$(5)\qquad \begin{cases} v_1 = d_3 u_1 + d_2 u_2 - d_0 u_3 - d_1 u_4, \\ v_2 = c_3 u_1 + c_2 u_2 - c_0 u_3 - c_1 u_4, \\ v_4 = - a_3 u_1 - a_2 u_2 + a_0 u_3 + a_1 u_4, \\ v_3 = - b_3 u_1 - b_2 u_2 + b_0 u_3 + b_1 u_4; \end{cases}$$

on en tire, en les ajoutant après les avoir multipliées respectivement par a_i, b_i, d_i, c_i $(i = 0, 1, 2, 3)$, et en tenant compte des formules (4),

$$\rho u_1 = a_0 v_1 + b_0 v_2 + c_0 v_3 + d_0 v_4,$$
$$\rho u_2 = a_1 v_1 + b_1 v_2 + c_1 v_3 + d_1 v_4,$$
$$\rho u_3 = a_3 v_1 + b_3 v_2 + c_3 v_3 + d_3 v_4,$$
$$\rho u_4 = a_2 v_1 + b_2 v_2 + c_2 v_3 + d_2 v_4.$$

En remplaçant u_1, u_2, u_3, u_4 par les valeurs précédentes dans les formules (5), on doit évidemment être conduit à des identités, puisque v_1, v_2, v_3, v_4 sont arbitraires comme u_1, u_2, u_3, u_4. En écrivant qu'il en est ainsi, on est conduit aux relations

$$\begin{array}{lll} (ad)_{03} + (ad)_{12} = \rho, & (bd)_{03} + (bd)_{12} = 0, & (cd)_{03} + (cd)_{12} = 0, \\ (ac)_{03} + (ac)_{12} = 0, & (bc)_{03} + (bc)_{12} = \rho, & (dc)_{03} + (dc)_{12} = 0, \\ (ab)_{03} + (ab)_{12} = 0, & (ac)_{03} + (ac)_{12} = 0, & (ad)_{03} + (ad)_{12} = \rho, \\ (ab)_{03} + (ab)_{12} = 0, & (bc)_{03} + (bc)_{12} = \rho, & (bd)_{03} + (bd)_{12} = 0, \end{array}$$

qui se réduisent à six :

$$(6)\qquad \begin{cases} (ac)_{03} + (ac)_{12} = 0, \\ (bd)_{03} + (bd)_{12} = 0, \\ (cd)_{03} + (cd)_{12} = 0, \\ (ab)_{03} + (ab)_{12} = 0, \\ (ad)_{03} + (ad)_{12} = (bc)_{03} + (bc)_{12} = \rho, \end{cases}$$

les expressions $(ac)_{ij}$, $(cd)_{ij}$, $(bd)_{ij}$, $(ab)_{ij}$ se définissant comme $(ad)_{ij}$ et $(bc)_{ij}$.

Les relations (6) sont absolument équivalentes aux relations (4) et, en les comparant, on en déduit que l'on a

$$(ad)_{12} = (bc)_{03}, \qquad (ad)_{03} = (bc)_{12}. \tag{7}$$

3. Calculons encore les formules qui définissent la transformation de contact prolongée (3), en nous bornant aux éléments du second ordre. Lorsque l'élément (x, y, z, p, q) décrit une multiplicité M_2, ayant pour support ponctuel une surface S, l'élément (X, Y, Z, P, Q) décrit également une multiplicité M'_2, et nous supposons que M'_2 a pour support ponctuel une autre surface Σ. Soient

$$z = f(x, y) \tag{8}$$

l'équation de la surface (S) et

$$Z = F(X, Y) \tag{9}$$

l'équation de la surface Σ. Nous poserons

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$
$$R = \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}, \qquad S = \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}, \qquad T = \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2};$$

pour prolonger la transformation (3), il s'agit de calculer R, S, T au moyen de x, y, z, p, q, r, s, t. Ces quantités se déduisent des deux relations

$$dP = R\, dX + S\, dY, \qquad dQ = S\, dX + T\, dY, \tag{10}$$

qui deviennent, en développant les différentielles dX, dY, dP, dQ, et employant la notation convenue pour les dérivées partielles,

$$\begin{aligned} & a_3\, dx + b_3\, dy + d_3(r\, dx + s\, dy) + c_3(s\, dx + t\, dy) \\ = {} & R\,[a_0\, dx + b_0\, dy + d_0(r\, dx + s\, dy) + c_0(s\, dx + t\, dy)] \\ & + S\,[a_1\, dx + b_1\, dy + d_1(r\, dx + s\, dy) + c_1(s\, dx + t\, dy)], \\ & a_2\, dx + b_2\, dy + d_2(r\, dx + s\, dy) + c_2(s\, dx + t\, dy) \\ = {} & S\,[a_0\, dx + b_0\, dy + d_0(r\, dx + s\, dy) + c_0(s\, dx + t\, dy)] \\ & + T\,[a_1\, dx + b_1\, dy + d_1(r\, dx + s\, dy) + c_1(s\, dx + t\, dy)]. \end{aligned}$$

En égalant les coefficients de dx et de dy dans les deux membres, on parvient aux quatre égalités

$$(11)\quad \begin{cases} R(a_0+d_0r+c_0s)+S(a_1+d_1r+c_1s)=a_3+d_3r+c_3s, \\ R(b_0+d_0s+c_0t)+S(b_1+d_1s+c_1t)=b_3+d_3s+c_3t, \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} S(a_0+d_0r+c_0s)+T(a_1+d_1r+c_1s)=a_2+d_2r+c_2s, \\ S(b_0+d_0s+c_0t)+T(b_1+d_1s+c_1t)=b_2+d_2s+c_2t. \end{cases}$$

Des deux premières formules (11) on tire

$$(13)\quad R=\frac{(ab)_{31}+(db)_{31}r+(ac)_{31}t+[(ad)_{13}+(cb)_{31}]s+(dc)_{31}(rt-s^2)}{(ab)_{01}+(db)_{01}r+(ac)_{01}t+[(ad)_{01}+(cb)_{01}]s+(dc)_{01}(rt-s^2)},$$

$$(14)\quad S=\frac{(ab)_{03}+(db)_{03}r+(ac)_{03}t+[(ad)_{03}+(cb)_{03}]s+(dc)_{03}(rt-s^2)}{(ab)_{01}+(db)_{01}r+(ac)_{01}t+[(ad)_{01}+(cb)_{01}]s+(dc)_{01}(rt-s^2)};$$

des formules (12) on tire de même

$$(14)^{bis}\quad S=\frac{(ab)_{21}+(db)_{21}r+(ac)_{21}t+[(ad)_{21}+(cb)_{21}]s+(dc)_{21}(rt-s^2)}{(ab)_{01}+(db)_{01}r+(ac)_{01}t+[(ad)_{01}+(cb)_{01}]s+(dc)_{01}(rt-s^2)},$$

$$(15)\quad T=\frac{(ab)_{02}+(db)_{02}r+(ac)_{02}t+[(ad)_{02}+(cb)_{02}]s+(dc)_{02}(rt-s^2)}{(ab)_{01}+(ab)_{01}r+(ac)_{01}t+[(ad)_{01}+(cb)_{01}]s+(dc)_{01}(rt-s^2)};$$

les valeurs de S fournies par les formules (14) et $(14)^{bis}$ sont identiques en tenant compte des relations (6) et (7).

Des formules (11) et (12) on tire également

$$(16)\quad RT-S^2=\frac{(ab)_{32}+(db)_{32}r+(ac)_{32}t+[(cb)_{32}+(ad)_{32}]s+(dc)_{32}(rt-s^2)}{(ab)_{01}+(db)_{01}r+(ac)_{01}t+[(cb)_{01}+(ad)_{01}]s+(dc)_{01}(rt-s^2)}.$$

On pourrait aussi inversement résoudre les équations (11) et (12) par rapport à r, s, t. Observons pour cela qu'on peut les écrire

$$(11)^{bis}\quad \begin{cases} r(d_3-d_0R-d_1S)+s(c_3-c_0R-c_1S)=-a_3+a_0R+a_1S, \\ r(d_2-d_0S-d_1T)+s(c_2-c_0S-c_1T)=-a_2+a_0S+a_1T, \end{cases}$$

$$(12)^{bis}\quad \begin{cases} s(d_3-d_0R-d_1S)+t(c_3-c_0R-c_1S)=-b_3+b_0R+b_1S, \\ s(d_2-d_0S-d_1T)+t(c_2-c_0S-c_1T)=-b_2+b_0S+b_1T; \end{cases}$$

on peut les déduire des formules (11) et (12) en permutant r et R, s et S, t et T, a_0 et $-d_3$, c_0 et d_1, a_1 et $-c_3$, b_0 et $-d_2$, b_1 et $-c_2$, b_3 et a_2, sans changer les lettres a_3, b_2, c_1, d_0. On obtiendra donc r, s, t, $rt-s^2$ en fonction de R, S, T, $RT-S^2$ en effectuant les mêmes permutations dans les formules (13), (14), (15) et (16).

Les transformations de contact formant un groupe, il est clair que les substitutions définies par les formules (13) à (16), où les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i sont des quantités quelconques, vérifiant les relations (4), forment également un groupe [1].

4. Étant donnée une équation de Monge-Ampère

$$u'_1(r't'-s'^2)+u'_2r'+u'_3t'+u'_4+u'_5s'=0, \tag{17}$$

dont les coefficients sont des fonctions de x', y', z', p', q', si on lui applique la transformation de contact définie par les formules (3). elle se change en une équation de même forme

$$u_1(rt-s^2)+u_2r+u_3t+u_4+u_5s=0, \tag{18}$$

dont les coefficients s'exprimeront au moyen de u'_1, u'_2, u'_3, u'_4, u'_5 par les formules suivantes :

$$\left\{\begin{aligned}
u_1 &= (dc)_{32}u'_1+(dc)_{31}u'_2+(dc)_{02}u'_3+(dc)_{01}u'_4+(dc)_{03}u'_5,\\
u_2 &= (db)_{32}u'_1+(db)_{31}u'_2+(db)_{02}u'_3+(db)_{01}u'_4+(db)_{03}u'_5,\\
u_3 &= (ac)_{32}u'_1+(ac)_{31}u'_2+(ac)_{02}u'_3+(ac)_{01}u'_4+(ac)_{03}u'_5,\\
u_4 &= (ab)_{32}u'_1+(ab)_{31}u'_2+(ab)_{02}u'_3+(ab)_{01}u'_4+(ab)_{03}u'_5,\\
u_5 &= 2(ad)_{32}u'_1+2(ad)_{31}u'_2+2(ad)_{02}u'_3+2(ad)_{01}u'_4+[(ad)_{03}+(cb)_{03}]u'_5.
\end{aligned}\right. \tag{19}$$

Les substitutions linéaires définies par ces formules (19) forment encore un groupe pour lequel

$$u_5^2-4u_2u_3+4u_1u_4$$

---

[1] Pour retrouver le groupe de transformations considéré par M. Hermite, il suffit de changer, dans les formules (13 à (16), r en G, s en H, t en G', R en G_1, S en H_1, T en G'_1, et de permuter en outre les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i de telle façon que les lignes du Tableau

$$\begin{matrix}
a_0 & b_0 & d_0 & c_0\\
a_1 & b_1 & d_1 & c_1\\
a_3 & b_3 & d_3 & c_3\\
a_2 & b_2 & d_2 & c_2
\end{matrix}$$

se changent en colonnes et *vice versa,* ce qui remplace les relations (4) par les relations équivalentes (6).

est un invariant; on vérifie en effet que l'on a

$$(20)\qquad u_3^2 - 4u_2u_3 + 4u_1u_4 = \rho^2 \left\{ u_3'^2 - 4u_2'u_3' + 4u_1'u_4' \right\}.$$

Ce résultat s'explique aisément *a priori* puisque la relation

$$u_3'^2 - 4u_2'u_4' + 4u_1'u_4' = 0$$

exprime que les deux systèmes de caractéristiques de l'équation (17) sont confondus. Si l'on suppose $\rho = 1$, le groupe (19) est identique au groupe formé par les substitutions linéaires qui reproduisent une forme quadratique.

Parmi les covariants que l'on peut associer à l'équation du second ordre, il en est un de très simple qui a une signification intéressante, c'est l'expression

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} W(\varphi, \psi) = u_1 & \left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}\right) + u_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{d\psi}{dx} - \frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{d\varphi}{dx}\right) \\ & + u_3 \left(\frac{d\varphi}{dv}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{d\psi}{dy}\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) + u_4 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right) \\ & + \frac{u_5}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{d\psi}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{d\psi}{dy} - \frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{d\varphi}{dy}\right), \end{aligned} \right.$$

où φ et ψ sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q. Si l'on cherche à quelles conditions doivent satisfaire les deux fonctions $\varphi(x, y, z, p, q)$ et $\psi(x, y, z, p, q)$ pour que les deux équations

$$(22)\qquad \varphi(x, y, z, p, q) = a, \qquad \psi(x, y, z, p, q) = b,$$

où a et b sont deux constantes arbitraires, forment un système complètement intégrable, dont toutes les intégrales vérifient l'équation du second ordre (17), on trouve qu'il faut et il suffit que l'on ait

$$[\varphi, \psi] = 0, \qquad W(\varphi, \psi) = 0.$$

5. La méthode suivie plus haut, pour prouver que les deux systèmes de relations (4) et (6) sont équivalents, peut se généraliser aisément. Considérons un système de $4n^2$ quantités

$$A_i^h, \quad B_i^h, \quad C_i^h, \quad D_i^h \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, n)$$

satisfaisant aux relations

$$
(23)\qquad
\begin{cases}
\sum_i (A_i^k C_i^h - A_i^h C_i^k) = 0, \\
\sum_i (B_i^k D_i^h - B_i^h D_i^k) = 0, \\
\sum_i (A_i^k D_i^h - B_i^h C_i^k) = 0, \qquad h \neq k, \\
\sum_i (A_i^h D_i^h - B_i^h C_i^h) = \rho,
\end{cases}
$$

les indices h et k étant constants dans toutes les sommations indiquées. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n$ un système de $2n$ indéterminées auxiliaires; posons

$$
(24)\qquad
\begin{cases}
\rho U_1 = A_1^1 u_1 + \ldots + A_1^h u_h + \ldots + A_1^n u_n + B_1^1 v_1 + \ldots + B_1^n v_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\rho U_i = A_i^1 u_1 + \ldots + A_i^h u_h + \ldots + A_i^n u_n + B_i^1 v_1 + \ldots + B_i^n v_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\rho U_n = A_n^1 u_1 + \ldots + A_n^h u_h + \ldots + A_n^n u_n + B_n^1 v_1 + \ldots + B_n^n v_n,
\end{cases}
$$

$$
(25)\qquad
\begin{cases}
\rho V_1 = C_1^1 u_1 + \ldots + C_1^h u_h + \ldots + C_1^n u_n + D_1^1 v_1 + \ldots + D_1^n v_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\rho V_i = C_i^1 u_1 + \ldots + C_i^h u_h + \ldots + C_i^n u_n + D_i^1 v_1 + \ldots + D_i^n v_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\rho V_n = C_n^1 u_1 + \ldots + C_n^h u_h + \ldots + C_n^n u_n + D_n^1 v_1 + \ldots + D_n^n v_n.
\end{cases}
$$

On déduit de ces formules, en tenant compte des relations (23),

$$
(26)\qquad
\begin{cases}
u_h = D_1^h U_1 + \ldots + D_n^h U_n - B_1^h V_1 - \ldots - B_n^h V_n, \\
v_h = A_1^h V_1 + \ldots + A_n^h V_n - C_1^h U_1 - \ldots - C_n^h U_n \\
\qquad (h = 1, 2, \ldots n);
\end{cases}
$$

en substituant ces expressions de u_h et de v_h dans les formules (24) et en observant que U_i et V_k sont des quantités arbitraires, comme u_i et v_k, on est conduit aux relations

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_h (A_i^h B_k^h - A_k^h B_i^h) = 0,\\ &\sum_h (C_i^h D_k^h - C_k^h D_i^h) = 0,\\ &\sum_h (A_k^h D_i^h - B_k^h C_i^h) = 0, \qquad k \neq i,\\ &\sum_h (A_i^h D_i^h - B_i^h C_i^h) = \rho, \end{aligned}\right.$$

l'indice h étant le seul qui varie dans les sommations indiquées.

On rencontre des systèmes de relations de la forme précédente dans la théorie générale des transformations de contact. Soient $Z, X_1, X_2, \ldots, X_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$, $2n+1$ fonctions des $2n+1$ variables indépendantes $z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ telles que l'on ait identiquement

$$(28)\quad dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_n\,dX_n = \rho\,(dz - p_1\,dX_1 - \ldots - p_n\,dx_n),$$

où ρ est une fonction de $z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Cette relation (28) est équivalente à $2n+1$ relations distinctes que l'on peut écrire

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial Z}{\partial z} - P_1\frac{\partial X_1}{\partial z} - \ldots - P_n\frac{\partial X_n}{\partial z} = \rho,\\ &\left.\begin{aligned} &\frac{dZ}{dx_h} = \sum_i P_i\frac{dX_i}{dx_h}\\ &\frac{\partial Z}{\partial p_h} = \sum_i P_i\frac{\partial X_i}{\partial p_h} \end{aligned}\right\} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right.$$

Si l'on regarde dans ces formules Z comme une fonction inconnue, les conditions d'intégrabilité conduisent à des relations que l'on peut mettre sous la forme (23) en posant

$$A_i^h = \frac{dX_i}{dx_h}, \qquad B_i^h = \frac{\partial X_i}{\partial p_h},$$
$$C_i^h = \frac{dP_i}{dx_h}, \qquad D_i^h = \frac{\partial P_i}{\partial p_h}.$$

Les relations équivalentes (27) sont précisément les relations bien connues

$$[X_i, X_k] = 0, \qquad [P_i, P_k] = 0, \qquad [P_i, X_k] = 0 \qquad (i \neq k),$$
$$[P_i, X_i] = \rho,$$

qui se trouvent ainsi établies d'une façon très naturelle.