

BULLETIN DE LA S. M. F.

A. PELLET

Sur l'approximation des racines réelles des équations

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 176-177

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__176_1

© Bulletin de la S. M. F., 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'APPROXIMATION DES RACINES RÉELLES DES ÉQUATIONS;

Par M. A. PELLET.

Étant donnés deux nombres a et b comprenant une seule racine X de l'équation $f(x) = 0$, pour appliquer la méthode d'approximation de Newton, on suppose qu'entre ces limites aucune des trois premières dérivées de $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ ne s'annule, et l'on part de la limite a , qui donne pour $f(x)$ et $f''(x)$ des valeurs de même signe. Alors la quantité $a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a_1$ est comprise entre a et X , la racine, mais la différence $X - a_1$ peut être d'un module bien supérieur à celui de $\frac{f(a)}{f'(a)}$, de sorte que l'application de la méthode est peu avantageuse. Il n'en est plus ainsi si l'on suppose en outre remplie la condition

$$f'^2(a) - 2f(a)f''(a) \geq 0.$$

Alors la fonction $f'^2(x) - 2f(x)f''(x)$, qui est positive pour $x = a$ et $x = X$, et dont la dérivée $-2f(x)f'''(x)$ ne s'annule pas entre ces limites, est positive de $x = a$ à $x = b$; et l'on en déduit que, pour toute valeur x comprise entre a et X , les deux quantités

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad x - 2 \frac{f(x)}{f'(x)}$$

comprennent entre elles la racine X . Ainsi $X - a_1$ est alors de même signe et de module moindre que $-\frac{f(a)}{f'(a)}$, comme aussi que $-2\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$, par suite que $-\frac{Mf'(a)}{f'^2(a) - Mf(a)}\frac{f^2(a)}{f'^2(a)}$, M étant de même signe et de module au moins égal au module maximum de $f''(x)$ entre a et X .

Supposons $f(a)$ et $f(b)$ positifs, $f'(a)$ et $f'(b)$ de signes contraires, et $f''(x)$ positif et allant en croissant de a à b . S'il y a une racine X entre a et b , on a

$$f(a) + (X - a)f'(a) + (X - a)^2\frac{f''(\xi)}{2} = 0,$$

ξ étant un nombre intermédiaire entre a et b . Il en résulte que X rend négatives les expressions

$$(1) \quad \begin{cases} f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2, \\ f(b) + f'(b)(x - b) + \frac{f''(a)}{2}(x - b)^2; \end{cases}$$

et positives les expressions

$$(2) \quad \begin{cases} f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(b)}{2}(x - a)^2, \\ f(b) + f'(b)(x - b) + \frac{f''(b)}{2}(x - b)^2. \end{cases}$$

D'autre part, $f'^2(a) - 2f(a)f''(a)$ étant positive, la racine la plus voisine de a doit être comprise entre $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ et $a - 2\frac{f(a)}{f'(a)}$. Ainsi, dans cet intervalle il doit y avoir des quantités rendant négatives les expressions (1) et positives les expressions (2), sans quoi il n'y a pas de racine de l'équation $f(x) = 0$ entre a et b .
