

BULLETIN DE LA S. M. F.

A. AURIC

Sur une propriété très générale des déterminants

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 177-179

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__177_1

© Bulletin de la S. M. F., 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE PROPRIÉTÉ TRÈS GÉNÉRALE DES DÉTERMINANTS ;

Par M. A. AURIC.

Considérons un système de n équations linéaires à n inconnues

$$(1) \quad a_i^0 = a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \dots + a_i^p x_p + \dots + a_i^n x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Appelons D_n^n le déterminant formé par les coefficients et D_n^0 le déterminant obtenu en remplaçant les éléments de la dernière colonne

$$a_1^n \quad a_2^n \quad \dots \quad a_n^n$$

respectivement par

$$a_1^0 \quad a_2^0 \quad \dots \quad a_n^0.$$

Appelons de même D_q^q le déterminant obtenu en ne considérant que les q premières inconnues et les q premières équations, et D_q^i le déterminant formé en remplaçant, dans D_q^q ,

$$a_1^q \quad a_2^q \quad \dots \quad a_q^q$$

respectivement par

$$a_1^i \quad a_2^i \quad \dots \quad a_q^i.$$

Soit $D_n^n(a_\lambda^\mu)$ le déterminant obtenu en supprimant dans D_n^n la ligne λ et la colonne μ .

Posons

$$\theta_\mu^i = \frac{D_n^i}{D_n^n}, \quad \theta_q^i = \frac{D_q^i}{D_q^q},$$

ce qui suppose

$$D_n^n \neq 0, \quad D_q^q \neq 0.$$

Dans notre Mémoire sur les équations linéaires, nous avons mis la solution du système (1) sous la forme générale

$$x_p = \sum_0^{n-p} \theta_{p+k}^0 T_p^{p+k},$$

en posant

$$T_p^{p+k} = \sum (-1)^v \theta_p^{p+\lambda_1} \theta_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1+\lambda_2} \dots \theta_{p+k-\lambda_v}^{p+k-\lambda_v},$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_v = k \quad (\lambda_i \neq 0).$$

Il est facile de montrer, en donnant à a_i^0 des valeurs spéciales,

$$a_i^0 = 0 \quad \text{si} \quad i \neq p+k,$$

$$a_i^0 = 1 \quad \text{si} \quad i = p+k,$$

que l'on a

$$T_p^{p+k} = \frac{D_{p+k}^{p+k}(a_{p+k}^p)}{D_{p+k}^{p+k}(a_{p+k}^{p+k})}.$$

On a dès lors la relation très générale que nous voulions établir

$$\frac{D_{p+k}^{p+k}(\alpha_{p+k}^p)}{D_{p+k}^{p+k}(\alpha_{p+k}^p)} = \sum (-1)^{\nu} \frac{D_p^{p+\lambda_1} D_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1+\lambda_2} \dots D_{p+k-\lambda_\nu}^{p+k}}{D_p^p D_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1} \dots D_{p+k-\lambda_\nu}^{p+k-\lambda_\nu}}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\nu = k \quad (\lambda_i \neq 0).$$

Les symboles T_p^{p+k} et θ_p^{p+k} sont tout à fait réciproques; on a en effet les relations suivantes :

$$\theta_p^{p+k} = \sum (-1)^{\nu} T_p^{p+\lambda_1} T_{p+\lambda_1}^{p+\lambda_1+\lambda_2} \dots T_{p+k-\lambda_\nu}^{p+k}$$

avec

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_\nu = k \quad (\lambda_i \neq 0),$$

$$\sum_{k=0}^{k=j} \theta_p^{p+k} T_{p+k}^{p+i} = \sum_{k=0}^{k=j} T_p^{p+k} \theta_{p+k}^{p+i} = 0.$$

On a de même

$$x_p = \sum_0^{n-p} \theta_{p+k}^0 T_p^{p+k},$$

$$\theta_p^0 = \sum_0^{n-p} x_p \theta_p^{p+k}.$$

Comme application prenons le cas simple de $k = 2$; on aura immédiatement

$$\frac{D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^p)}{D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^p)} = \frac{D_p^{p+1} D_{p+1}^{p+2}}{D_p^p D_{p+1}^{p+1}} - \frac{D_p^{p+2}}{D_p^p}$$

et en écrivant les déterminants du second membre, comme les mineurs de D_{p+2}^{p+2} , il vient

$$D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^p) D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+1}^{p+1} \alpha_{p+2}^{p+2}) = D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+1}^p \alpha_{p+2}^{p+2}) D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^{p+1}) - D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+1}^p \alpha_{p+2}^{p+1}) D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^{p+2})$$

ou, sous la forme d'un déterminant,

$$D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^p) D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+1}^{p+1} \alpha_{p+2}^{p+2}) = \begin{vmatrix} D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^p \alpha_{p+1}^{p+1}) & D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^p \alpha_{p+1}^{p+1}) \\ D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^{p+1}) & D_{p+2}^{p+2}(\alpha_{p+2}^{p+1}) \end{vmatrix}.$$

On reconnaît alors une propriété bien connue des déterminants (voir p. 111 du Mémoire précité).