E. DELASSUS

Sur les engrenages à contact ponctuel

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 43-47
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__43_1>

SUR LES ENGRENAGES A CONTACT PONCTUEL;

Par M. Étienne Delassus.

1. Soient S un corps solide ayant un mouvement M et S′ un autre corps solide ayant un mouvement M′, et soient μ et μ' les deux systèmes de segments qui, à chaque instant, donnent la représentation des vitesses dans les deux corps.

Il s'agit de tracer une surface Σ dans S et une surface Σ' dans S′ telles que ces deux surfaces aient toujours en commun un *élément* composé d'un point p et d'un plan P passant par p.

Donnons-nous, *a priori,* le mouvement absolu de l'élément (p, P) et cherchons à quelles conditions il doit satisfaire pour que la suite de ses positions relatives dans S appartienne à une même surface et qu'il en soit de même pour la suite de ses positions relatives dans S′.

Soient Γ, γ, γ' les trajectoires absolues et relatives de p et Δ, δ, δ' leurs tangentes en p. Soient D et D′ les développables qui sont les enveloppes relatives de P et G, G′ les génératrices de contact de P avec ces deux enveloppes.

Si l'on applique les conditions bien connues pour qu'une suite simplement infinie d'éléments appartienne à une surface, on voit immédiatement le résultat suivant :

Pour que l'élément (p, P) *engendre un engrenage à contact ponctuel, il faut et il suffit que* P *contienne toujours* δ *et* δ' *ou que* p *se trouve toujours à l'intersection de* G *et* G'. *Ces deux conditions étant d'ailleurs équivalentes, la réalisation de l'une entraîne la réalisation de l'autre.*

2. De là deux sortes de génération :

1° *Génération ponctuelle.* — On se donne arbitrairement le mouvement d'un point p et, pour chaque position de p, le plan P est déterminé par les deux droites $\delta\delta'$. Si, pour chaque position de p, les deux droites $\delta\delta'$ sont confondues, il y a indétermination; en pratique, on fait correspondre à chaque position de p et suivant une loi arbitrairement choisie une droite δ'', et P est déterminé par δ et δ''. C'est ce cas d'indétermination qui se présente chaque fois qu'on cherche un *engrenage à roulement,* car les vitesses relatives de p dans S et S' sont assujetties à coïncider, et ces vitesses sont dirigées suivant δ et δ'.

2° *Génération tangentielle.* — On se donne arbitrairement le mouvement du plan P et, pour chaque position de P, le point p est déterminé par l'intersection des deux droites G, G'. Il y a impossibilité si, pour toutes les positions de P, ces deux droites sont toujours parallèles, et indétermination si elles sont toujours confondues; dans ce dernier cas, les deux développables D, D' sont tangentes tout le long de G et constituent un *engrenage à contact linéaire;* à chaque position de P on fera correspondre une droite G'' et p sera l'intersection de G et G''.

Ayant ainsi trouvé le mouvement absolu de (p, P) satisfaisant à toutes les conditions imposées, on prendra une surface Σ tangente à D tout le long de γ et une surface Σ' tangente à D' tout le long de γ', et l'on aura réalisé, au point de vue théorique, un engrenage à contact ponctuel.

Remarquons enfin la relation géométrique suivante :

Soient π *la normale en* p *au plan* P *et* V *la vitesse de* p *estimée suivant la direction* π; *en exprimant que les vitesses relatives de* p *dans* S *et* S' *sont toutes deux normales à* π, *on a*

$$M'_{\pi}(\mu) = M'_{\pi}(\mu') = V.$$

3. Considérons maintenant le cas où μ et μ' sont indépendants du temps, c'est-à-dire où les deux mouvements M et M' sont des mouvements hélicoïdaux uniformes qui peuvent se réduire à des rotations.

Il est évident que le cas le plus simple de génération ponctuelle s'obtiendra en donnant au point p un mouvement rectiligne et uniforme et que le cas le plus simple de génération tangentielle s'obtiendra en donnant au plan P une translation rectiligne et uniforme. Pour abréger, désignons par A et B les deux sortes d'engrenages ainsi obtenus.

Considérons un engrenage B et soit V la vitesse normale constante du plan P. La double égalité établie à la fin du numéro précédent montre immédiatement que la droite π, qui a une direction constante, restera fixe; donc le point p décrira cette droite π perpendiculaire à la direction constante du plan P et avec la vitesse constante V. Ainsi, *tout engrenage* B *est un engrenage* A, pourvu toutefois que l'on ne soit pas dans le cas d'indétermination de la génération tangentielle.

La réciproque n'est pas vraie; cependant on peut énoncer la propriété suivante :

Si, dans un engrenage A, *la droite* Δ *décrite par* p *et la vitesse* V *de* p *sur cette droite satisfont aux conditions*

$$M^t_\Delta(\mu) = M^t_\Delta(\mu') = V,$$

le plan P *reste toujours perpendiculaire à* Δ *et l'engrenage peut être considéré comme un engrenage* B, pourvu toutefois que l'on ne soit pas dans le cas d'indétermination de la génération ponctuelle, mais la conclusion subsistera quand même si la droite arbitraire δ'' introduite dans ce cas est assujettie à rester constamment perpendiculaire à Δ.

J'appellerai *génération* AB la génération A ainsi particularisée de façon à être en même temps une génération B.

Je ferai remarquer que la génération AB fournit immédiatement la vis sans fin quand on suppose que μ et μ' sont deux segments rectangulaires non concourants et qu'on cherche la droite Δ satisfaisant à la condition d'égalité des deux moments et située dans le plan mené par μ perpendiculairement à μ'. Cette génération AB fournit aussi immédiatement l'engrenage à roulement de White quand μ et μ' sont deux segments parallèles en prenant pour Δ la génératrice de contact des deux cylindres primitifs, parcourue avec une vitesse constante arbitraire, la droite δ'' étant la normale commune à ces deux cylindres.

4. Considérons les axes H et H' des deux mouvements hélicoïdaux M et M' et les vitesses de rotation correspondantes ω, ω'. Considérons un engrenage B obtenu en déplaçant le plan P parallèlement à H et H' avec une vitesse normale constante V. On voit immédiatement les résultats suivants :

La développable D est un cylindre parallèle à H et dont la section droite est une développante d'un cercle ayant son centre sur H et $\frac{V}{\omega}$ pour rayon. De même D' est un cylindre parallèle à H' et dont la section droite est une développante d'un cercle ayant son centre sur H' et $\frac{V}{\omega'}$ pour rayon. Ces deux développables sont indépendantes de la position relative des deux axes ainsi que des pas des deux mouvements hélicoïdaux. La droite Δ, lieu absolu de p, est perpendiculaire à H et H'. Si les deux mouvements M et M' sont des rotations, les deux trajectoires relatives de p sont des sections droites de D et D'.

De là résulte immédiatement le fait suivant :

« Les deux cylindres à développantes D et D' constituent un engrenage à contact ponctuel fonctionnant sans altération du rapport des vitesses angulaires quand on modifie d'une façon quelconque la position relative des deux axes. »

Cette propriété peut encore s'énoncer comme il suit :

L'engrenage cylindrique à développantes continue à fonctionner, sans altération du rapport des vitesses angulaires, mais comme engrenage à contact ponctuel quand on modifie d'une façon quelconque la position relative des deux axes de rotation.

De sorte que l'engrenage cylindrique à développantes constitue *théoriquement* le joint parfait en ce sens qu'il fonctionne pour des positions relatives *quelconques* des deux axes et qu'ensuite il existe pour une valeur quelconque du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, tandis que les joints connus n'effectuent que la transformation $\omega' = \omega$.