BULLETIN DE LA S. M. F.

L. AUTONNE

Sur l'hypohermitien

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 140-155
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__140_1>

SUR L'HYPOHERMITIEN;

Par M. Léon Autonne.

INTRODUCTION.

Dans le présent Travail, je me propose de continuer et de généraliser les recherches commencées dans mon Mémoire *Sur l'Hermitien* (1) (*Rendiconti du Cercle mathématique de Palerme*, 1902) et, partiellement, dans ma Note *Sur les groupes*

(1) J'y renverrai par une indication comme celle-ci, par exemple (*loc. cit.*, 12°).

linéaires réels et orthogonaux (*Bulletin de la Société mathématique de France,* 1902).

Les méthodes, les notations, la terminologie, employées dans ces publications seront conservées.

Une matrice p-aire *hermitienne*

$$A = [a_{jk}] \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, p)$$

a été définie par une double propriété :

I. $A = \bar{A}'$, c'est-à-dire $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$.

II. L'expression *réelle* $X = A(x, \bar{x})$ est toujours $X > 0$.

Le déterminant $|A|$ est alors $\neq 0$.

Supposons $X \geqq 0$. Alors l'hermitienne devient, par définition, *hypohermitienne;* $|A| = 0$, et il faut envisager le *rang* q de A. Si, dans $|A|$, tous les $(p - q - 1)^{\text{ièmes}}$ mineurs s'évanouissent, tandis qu'un au moins des $(p - q)^{\text{ièmes}}$ mineurs, déterminants à q^2 éléments, est $\neq 0$, alors q sera le *rang* (Pascal, *Determinanten,* p. 192, édition de Teubner, 1900).

Les hypohermitiennes $\mathfrak{A}$ partagent presque toutes les propriétés des hermitiennes. Voici l'énumération des principales :

I.

Toute $\mathfrak{A}$ *est canonisable et possède au moins une canonisante unitaire.*

II.

A toute $\mathfrak{A}$ *correspond une et une seule hypohermitienne* $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\mathfrak{A}}$, telle que $\mathfrak{B}^m = \mathfrak{A}$, $m =$ entier positif. $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{B}$ *ont le même rang.*

III.

Toute $\mathfrak{A}$ *peut être engendrée par le procédé* $\mathfrak{A} = \mathrm{a}\bar{\mathrm{a}}'$, *où* a *est une matrice p-aire de rang égal à celui de* $\mathfrak{A}$. *Pour* $\mathfrak{A}$ *donné,* a *est obtenue par la formule*

$$\mathrm{a} = \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \mathrm{U}, \qquad \mathrm{U} = \textit{unitaire p-aire arbitraire.}$$

Tous les résultats précédents subsistent quand $\mathfrak{A}$ devient une hypohermitienne réelle $\mathcal{A}$. Seulement, au lieu des unitaires, interviennent des substitutions W orthogonales réelles.

IV.

Toute $\mathcal{A}$ est symétrique. Pour qu'une matrice p-aire réelle et symétrique $\mathcal{A}$ soit hypohermitienne, il faut et il suffit que la forme quadratique $\mathcal{A}(t, t)$ soit $\geqq 0$ pour toutes les valeurs réelles des t.

V.

Toute $\mathcal{A}$ est canonisable et possède au moins une canonisante réelle et orthogonale.

VI.

A toute $\mathcal{A}$ correspond une et une seule hypohermitienne réelle $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\mathcal{A}}$, telle que $\mathcal{B}^m = \mathcal{A}$; m = entier positif. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont le même rang q.

VII.

Toute $\mathcal{A}$ peut être engendrée par le procédé $\mathcal{A} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ où $\mathfrak{P}$ est une matrice p-aire, de rang q, réelle. Pour $\mathcal{A}$ donnée, $\mathfrak{P}$ s'obtient par la formule

$$\mathfrak{P} = \mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\mathrm{W}, \qquad \mathrm{W} = \text{arbitraire}.$$

Un résumé des présentes recherches a paru dans les *Comptes rendus* (9 mars 1903).

Dans un autre travail, je montre quel rôle important jouent les hypohermitiennes réelles $\mathcal{A}$ dans la Géométrie : 1° des systèmes de sphères, 2° des substitutions linéaires, orthogonales et réelles. Ce travail, intitulé : *Sur la décomposition d'une substitution linéaire, réelle et orthogonale, en un produit d'inversions,* est paru dans les *Annales de l'Université de Lyon* (1903). Un résumé en a été inséré aux *Comptes rendus* (18 mai 1903).

HYPOHERMITIENNES COMPLEXES.

1° Soit

$$\mathrm{A} = |a_{jk}| \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, p)$$

une matrice p-aire de *rang* q. Autrement dit, dans le déterminant $|A|$, tous les $(p-q-1)^{\text{ièmes}}$ mineurs, déterminants à $(q+1)^2$ éléments, sont nuls, tandis qu'un au moins des $(p-q)^{\text{ièmes}}$ mineurs, déterminants à q^2 éléments, est différent de zéro.

Assujétissons A à une double condition.

D'abord faisons $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$, c'est-à-dire $A = \bar{A}'$. Alors l'expression

$$X = A(x, \bar{x})$$

sera réelle, car

$$\bar{X} = \overline{A(x, \bar{x})} = \bar{A}(\bar{x}, x) = \bar{A}'(x, \bar{x}) = X.$$

En second lieu, pour *tout* point x, X sera positif ou nul, mais jamais négatif, $X \geqq 0$.

On exprimera cette double propriété en disant que l'expression X est un *hypohermitien* et que la matrice A est une *hypohermitienne*.

L'hermitien, $X > 0$, est un cas particulier de l'hypohermitien, $X \geqq 0$.

2° Effectuons le changement de variables $x = R[z]$, $|R| \neq 0$, c'est-à-dire posons

$$x_j = \sum_k r_{jk} z_k, \qquad R = [r_{jk}];$$

X devient

$$X = A(R[z], \bar{R}[\bar{z}]) = \bar{R}'AR(z, \bar{z}) = Z.$$

Z est encore un hypohermitien, puisque

$$\overline{(\bar{R}'AR)'} = \bar{R}'AR, \qquad \text{car} \qquad \bar{A}' = A.$$

D'ailleurs, pour tout x, $X \geqq 0$, et $Z \geqq 0$ pour tout z.

A *et* $B = \bar{R}'AR$ *ont le même rang* q. En effet, dans $|A|$ et $|B|$, les mineurs de même ordre forment deux systèmes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ de même degré; on passe de l'un à l'autre par une collinéation $\mathfrak{R}$. $|\mathfrak{R}|$ est une certaine expression monome en $|R|$ et $|\bar{R}|$ et, par conséquent, $|\mathfrak{R}| \neq 0$. Tout cela résulte de propriétés bien connues des déterminants, qu'on trouvera, par exemple, dans le Traité déjà cité de M. Pascal, pages 83 et suivantes. $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ne peuvent avoir tous leurs termes nuls pour l'un sans que tous les termes de l'autre système le soient aussi. A et B ont donc même rang q.

3° Soient A, B, ... diverses hypohermitiennes; A_1, B_1, ... ce qu'elles deviennnent par le changement R de variables :

$$A_1 = \overline{R}'AR, \qquad B_1 = \overline{R}'AR, \qquad \ldots;$$

si l'on veut que

$$A_1 B_1 = \overline{R}'ABR,$$

il suffira de prendre R unitaire, $R\overline{R}' = E$. C'est ce que l'on fera constamment, quand on aura à traiter des produits de matrices, hypohermitiennes ou non. Autrement dit : *les changements de variables seront* TOUJOURS *unitaires.*

4° La matrice-unité E est hermitienne; la matrice $\overline{C}'C$ sera hypohermitienne, quelle que soit la matrice C, p-aire, mais de rang quelconque. En effet, d'abord

$$\overline{(\overline{C}'C)'} = \overline{C}'C.$$

Nommons en second lieu, $\mathfrak{C}$ ce que devient, pour $x = C[z]$, l'hermitien $E(x, \overline{x})$. Il viendra :

$$\mathfrak{C} = E(C[z], \overline{C}[\overline{z}]) = \overline{C}'\mathbf{C}(z, \overline{z}),$$

Alors : $\mathfrak{C} > 0$, si $C[z] \neq 0$, et $\mathfrak{C} = 0$, si $C[z] = 0$, pour $|C| = 0$. Mais, pour aucun z, $\mathfrak{C} < 0$.

Nous verrons plus loin si toute hypohermitienne peut être obtenue par ce procédé.

5° *L'équation caractéristique* (D)

$$|\rho E - A| = 0$$

de l'hypohermitienne A *n'a que des racines réelles et non négatives.*

Soit ρ une racine de (D). Il y aura au moins un point x tel que

$$\rho x_j = \sum_k a_{jk} x_k = \frac{\partial X}{\partial \overline{x}_j}.$$

Alors

$$X = \sum_j \overline{x}_j \frac{\partial X}{\partial \overline{x}_j} = \rho \sum_j x_j \overline{x}_j = \rho \sum_j |x_j|^2 = \rho.$$

Or $X \geqq 0$ et $\rho \geqq 0$. C. Q. F. D.

Pour que A devienne hermitienne, il faut et il suffit (*loc. cit.*, 19°) que $|A| \neq 0$. Donc *les hermitiennes sont celles, parmi les hypohermitiennes, pour lesquelles le rang q est égal à l'ordre p.*

6° Théorème. — *Toute hypohermitienne est canonisable et admet au moins une canonisante unitaire.*

La démonstration est sensiblement la même qu'au 22° de mon travail *Sur l'Hermitien.*

Si $p = 1$, l'hypohermitienne A est canonique forcément et admet la canonisante unitaire unité.

Je dis que si le théorème est vrai pour $p - 1$, il est vrai aussi pour p.

Soit ρ une racine, nulle ou non, de l'équation caractéristique $\mathfrak{D}$. Nommons ω un point tel que (ω_j étant les coordonnées de ω)

$$\rho\omega_j = \sum_k a_{jk}\omega_k.$$

L'intervention d'une unitaire convenable permettra de faire

$$0 = \omega_1 = \ldots = \omega_{p-1}, \qquad 1 = \omega_p,$$
$$a_{jp} = 0, \qquad a_{pp} = \rho \qquad (j = 1, 2, \ldots, p-1).$$

En vertu de $\overline{A}' = A$ (1°) ou $a_{jk} = \overline{a}_{kj}$, il viendra

$$a_{pj} = 0 \qquad \text{et} \qquad A(x, y) = \mathrm{a}(x, y) + \rho\, x_p y_p,$$

a étant une matrice $(p-1)$-aire, obtenue en supprimant dans A les $p^{\text{ièmes}}$ ligne et colonne; a est hypohermitienne, car $\mathrm{a}(x, \overline{x})$ n'est pas autre chose que $X = A(x, \overline{x})$, quand on fait

$$x_p = \overline{x}_p = 0.$$

Nommons R une canonisante unitaire $(p-1)$-aire de a. R existe par hypothèse. L'unitaire p-aire $\mathfrak{R}$ telle que

$$\mathfrak{R}(x, y) = \mathrm{R}(x, y) + x_p y_p$$

sera évidemment une canonisante pour A. C. Q. F. D.

7° Soient R une canonisante unitaire et A_0 la forme canonique correspondante de l'hypohermitienne A. On aura, q étant le rang de A,

$$A = R^{-1}A_0R = \overline{R}'A_0R; \qquad A_0(x, y) = \sum_r K_r x_r y_r,$$

$$r = 1, 2, \ldots, q; \qquad K_r = \text{quantité positive } (5^{\circ}).$$

Réciproquement : *si, dans une matrice canonique de rang* q,

$$A_0 = \sum_r K_r x_r y_r,$$

les coefficients K *sont positifs, la transformée*

$$A = R^{-1}A_0R = \overline{R}'A_0R,$$

par une unitaire quelconque R, *sera évidemment une hypohermitienne de rang* q.

En effet, A_0 est, pour $K_r > 0$, une hypohermitienne, et aussi A, en vertu de 2°.

En particulier sera hypohermitienne, pour un exposant réel quelconque σ, la canonique T_0, telle que

$$T_0(x, y) = \sum_r x_r y_r K_r^{\sigma},$$

K_r^{σ} étant la puissance d'exposant σ, calculée *arithmétiquement*. K_r^{σ} sera un nombre unique et positif, même si σ est incommensurable.

La matrice $T = R^{-1}T_0R$ sera hypohermitienne.

Faisons $\sigma =$ l'entier positif m; $T_0 = A_0^m$, $T = A^m$ est hypohermitienne.

Faisons $\sigma = \frac{1}{m}$, m entier positif; on aura

$$T_0^m = A_0 \qquad \text{et} \qquad T^m = A.$$

On va voir que T est *la seule* hypohermitienne dont la puissance $m^{\text{ième}}$ reproduise A, de sorte qu'on pourra écrire sans ambiguïté

$$T = A^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{A}.$$

8° Lemme. — *Soit l'hypohermitienne* a, *telle que* $a^n = 0$,

n = entier positif : on a

$$\mathrm{a} = 0.$$

Il suffit, pour le voir, de canoniser a.

9° Théorème. — *Soient une hypohermitienne* A *et un entier positif m. Il y aura toujours une et une seule hypohermitienne* B, *telle que* $B^m = A$. A *et* B *ont le même rang q*.

D'abord l'hypothèse $B = A^m$ entraîne

$$BA = A^m A = A^{m+1} = AA^m = AB.$$

A et B sont *échangeables*.

Prenons A canonique et écrivons

$$A(x, y) = \sum_j l_j x_j y_j.$$

Mettons en évidence les coefficients l_j égaux en posant

$$l_1 = l_2 = \ldots = l_{\alpha_1} = K_1, \qquad l_{\alpha_1+1} = \ldots = l_{\alpha_1+\alpha_2} = K_2, \qquad \ldots,$$
$$q = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots; \qquad l_j = 0, \qquad \text{pour } j > q.$$

Les K sont des nombres positifs tous distincts.

Posons ensuite

$$E_1(x, y) = \sum_{s=1}^{s=\alpha_1} x_s y_s,$$
$$E_2(x, y) = \sum_{s=1}^{s=\alpha_2} x_{\alpha_1+s} y_{\alpha_1+s},$$
$$E_3(x, y) = \sum_{s=1}^{s=\alpha_3} x_{\alpha_1+\alpha_2+s} y_{\alpha_1+\alpha_2+s},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

de façon qu'il vienne

$$A(x, y) = K_1 E_1 + K_2 E_2 + K_3 E_3 + \ldots.$$

Quant à la matrice hypohermitienne B, elle devra être supposée quelconque :

$$B = |b_{jk}| \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, p).$$

La condition $AB = BA$ donne

$$l_j b_{jk} = b_{jk} l_k, \qquad b_{jk}(l_j - l_k) = 0,$$

d'où

$$b_{jk} = 0 \quad \text{ou} \quad l_j - l_k = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} B(x, y) = {} & \mathfrak{B}_1(x_1, \ldots, x_{\alpha_1}; y_1, \ldots, y_{\alpha_1}) \\ & + \mathfrak{B}_2(x_{\alpha_1+1}, \ldots, x_{\alpha_1+\alpha_2}; y_{\alpha_1+1}, \ldots, y_{\alpha_1+\alpha_2}) + \ldots \\ & + \Omega(x_{q+1}, \ldots, x_p; y_{q+1}, \ldots, y_p). \end{aligned}$$

Faisant $B^m = A$, on aura

$$\mathfrak{B}_1^m = K_1 E_1, \qquad \mathfrak{B}_2^m = K_2 E_2, \qquad \ldots, \qquad \Omega^m = 0.$$

Chacune des matrices $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, ..., Ω [α_1-aire, α_2-aire, ..., $(p-q)$-aire] est hypohermitienne, car $\mathfrak{B}_1(x, \bar{x})$, par exemple, est ce que devient $B(x, \bar{x})$ pour

$$x_{\alpha_1+1} = \ldots = x_p = 0.$$

Alors (8°) la matrice $(p-q)$-aire s'évanouit, $\Omega = 0$. Les hypohermitiennes $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, ... ont leurs $|\mathfrak{B}_1|$, $|\mathfrak{B}_2|$, ... égaux à

$$K_1^{\frac{\alpha_1}{m}}, \quad K_2^{\frac{\alpha_2}{m}}, \quad \ldots,$$

respectivement, c'est-à-dire $\neq 0$. Ainsi $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, ... sont des hermitiennes et (*loc. cit.*, 24° et 25°)

$$\mathfrak{B}_1 = K_1^{\frac{1}{m}} E_1, \qquad \mathfrak{B}_2 = K_2^{\frac{1}{m}} E_2, \qquad \ldots.$$

Ainsi B est unique; c'est la matrice T déjà construite au 7°. B a q pour rang. C. Q. F. D.

On écrira $B = A^{\frac{1}{m}}$ ou $\sqrt[m]{A}$ = racine $m^{\text{ième}}$ de A.

En résumé, les hypohermitiennes se comportent comme les hermitiennes (*loc. cit.*, 25°).

10° Je vais revenir maintenant au procédé signalé au 4° pour la génération des hypohermitiennes et résoudre le problème que voici :

Soit une hypohermitienne p-aire $\mathfrak{A}$ *de rang* q; *construire les matrices p-aires* A *de rang* q', *telles que* $\mathfrak{A} = A\bar{A}'$.

11° Lemme auxiliaire. — *Soient, entre* p *variables* x_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, *des équations* distinctes *au nombre de* q'

$$(\Gamma) \qquad C_r = \sum_j c_{rj} x_j = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, q').$$

Moyennant un changement unitaire de variables x_j, Γ *peut toujours être remplacé par un système équivalent*

$$(\Gamma_0) \qquad x_1 = x_2 = \ldots = x_{q'} = 0.$$

Les q' équations Γ sont équivalentes à l'équation *unique* ($|C_r| =$ module de C_r),

$$0 = \Lambda(x, \bar{x}) = \sum_r C_r \bar{C}_r = \sum_r |C_r|^2 = \sum_{rjk} \bar{x}_j x_k c_{rk} \bar{c}_{rj} = \sum_{jk} \bar{x}_j x_k \lambda_{jk};$$

$$\lambda_{jk} = \sum_r c_{rk} \bar{c}_{rj}.$$

La matrice p-aire $\Lambda = [\lambda_{jk}]$ est hypohermitienne. En effet, d'abord

$$\bar{\lambda}_{jk} = \sum_r \bar{c}_{rk} c_{rj} = \lambda_{kj} \qquad \text{et} \qquad \bar{\Lambda}' = \Lambda.$$

Puis, en vertu de sa formation même, l'expression réelle $\Lambda(x, \bar{x})$ ne peut devenir négative.

Transformons les x par une canonisante unitaire de l'hypohermitienne Λ. Cela revient à faire :

$$\lambda_{jk} = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq k;$$
$$\lambda_{jj} = 0 \quad \text{pour} \quad j > q';$$
$$\lambda_{jj} = l_j \quad \text{pour} \quad r = j \leqq q', \quad \text{avec} \quad l_j \text{ positif} \quad (6^\circ \text{ et } 7^\circ).$$

Alors

$$\Lambda(x, \bar{x}) = \sum_r l_r x_r \bar{x}_r = \sum_r l_r |x_r|^2 = 0.$$

Le système Γ est équivalent, puisque les q' coefficients l_r sont positifs, aux q' équations $l_r |x_r| = 0$, c'est-à-dire aux q' équations $x_r = 0$. C. Q. F. D.

Γ est identiquement satisfait pour $x_1 = \ldots = x_{q'} = 0$, ce qui entraîne

$$c_{rj} = 0 \qquad \text{pour} \qquad j > q'.$$

12° Revenons maintenant au problème du 10° et aux matrices $\mathfrak{A}$ et A.

Si $A = [a_{jk}]$, avec le rang q', les p équations

$$0 = \sum_k a_{jk} x_k$$

se réduisent à q' distinctes. En vertu du lemme du 11°, il sera licite de supposer que ces q' équations sont $x_1 = \ldots = x_{q'} = 0$, ce qui fera (11° *in fine*) $a_{jk} = 0$, pour $k > q'$. La matrice A aura ses $p - q'$ dernières colonnes composées de zéros. C'est ce qu'on indiquera par la notation

$$\begin{array}{r} q' \\ p-q' \end{array} \left| \begin{array}{cc} \underbrace{\ldots}_{q'} & \underbrace{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}}_{p-q'} \end{array} \right| = A.$$

Posons, ce qui n'est ni plus ni moins général, $A = DB$, où la matrice p-aire D a son $|D| \neq 0$. Il est évident que la p-aire B a encore ses $p - q'$ dernières colonnes composées de zéros. A et B ont même rang q' (2°).

13° La relation $\mathfrak{A} = A\bar{A}'$ devient

$$\mathfrak{A} = DB\bar{B}'\bar{D}' = D\mathfrak{B}D'$$

où $\mathfrak{B}$ est l'*hypohermitienne* (4°) $B\bar{B}'$.

Prenons pour D une canonisante unitaire de $\mathfrak{A}$, dont $\mathfrak{A}_0$ sera la forme canonique correspondante,

$$\mathfrak{A}_0(x, y) = l_1^2 x_1 y_1 + \ldots + l_q^2 x_q y_q, \qquad l_1, \ldots, l_q = \text{réels}.$$

Il viendra

$$\mathfrak{A} = D\mathfrak{A}_0 D^{-1} = D\mathfrak{B}\bar{D}',$$

car $D\bar{D}' = E$ par unitarité. De là on conclut que

$$\mathfrak{B} = B\bar{B}' = \mathfrak{A}_0.$$

Si $B = [b_{jk}]$, il viendra, en identifiant $B\overline{B}'$ avec $\mathfrak{A}_0$,

$$\sum_\alpha b_{j\alpha}\bar{b}_{k\alpha} = 0 \qquad \text{pour} \qquad j \neq k, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p.$$

$$\sum_\alpha b_{j\alpha}\bar{b}_{j\alpha} = \sum_\alpha |b_{j\alpha}|^2 = 0 \qquad \text{pour} \qquad j > q.$$

Alors $b_{j\alpha} = 0$ pour $j > q$. La matrice B a ses $p - q$ dernières lignes composées de zéros, et le rang q' de B ne peut dépasser le rang q de $\mathfrak{A}$, $q' \leqq q$.

14° Faisons d'abord $q' < q$. On pourra alors écrire, avec une notation analogue à celle du 12°,

$$B = \begin{array}{r} q' \\ q - q' \\ p - q \end{array}\left|\begin{array}{ccc} \mathfrak{B} & 0 & 0 \\ \mathfrak{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$
$$\qquad\qquad\qquad \underbrace{\ \ }_{q'} \ \ \underbrace{\ \ \ \ }_{q-q'} \ \ \underbrace{\ \ \ \ }_{p-q}$$

où :

$\mathfrak{B}$ est une matrice q'-aire;

$\mathfrak{L}$ est un Tableau composé de $q - q'$ lignes et de q' colonnes, etc.

Il viendra de même

$$\overline{B}' = \left|\begin{array}{ccc} \overline{\mathfrak{B}}' & \overline{\mathfrak{L}}' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right|, \qquad \mathfrak{A}_0 = \left|\begin{array}{ccc} \mathrm{a} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right|,$$

où :

$\overline{\mathfrak{B}}'$ est la matrice transposée, imaginaire conjuguée, de la matrice q'-aire $\mathfrak{B}$;

$\overline{\mathfrak{L}}'$ est le Tableau transposé (les lignes écrites comme colonnes et réciproquement) du Tableau $\overline{\mathfrak{L}}$, tandis que les éléments du Tableau $\overline{\mathfrak{L}}$, à $q - q'$ lignes et q' colonnes, sont les imaginaires conjuguées du Tableau $\mathfrak{L}$;

a et $\mathcal{A}$ sont des matrices, q'-aire et $(q - q')$-aire respectivement, telles que (13°)

$$\mathrm{a}(x, y) = \sum_{s=1}^{s=q'} l_s^2 x_s y_s \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}(x, y) = \sum_{s=q'+1}^{s=q} \cdot$$

Un Tableau, tel que $\mathfrak{L}$, est une matrice où plusieurs lignes, ou plusieurs colonnes sont composées de zéros. On peut donc, sans théorie supplémentaire, parler de la multiplication des Tableaux, soit entre eux, soit avec des matrices. Il est évident que si un produit de deux facteurs, où l'un est un Tableau et l'autre une matrice à déterminant $\neq$ o, est nul, le Tableau est nul, c'est-à-dire formé exclusivement de zéros.

Sous le bénéfice de ces explications, un calcul simple donne

$$\mathrm{B}\overline{\mathrm{B}}' = \begin{vmatrix} \mathcal{B}\overline{\mathcal{B}}' & \mathcal{B}\overline{\mathcal{C}}' & 0 \\ \mathcal{C}\overline{\mathcal{B}}' & \mathcal{C}\overline{\mathcal{C}}' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathfrak{A}_0 = \begin{vmatrix} \mathrm{a} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

et, en identifiant,

$$\mathrm{a} = \mathcal{B}\overline{\mathcal{B}}', \qquad \text{d'où} \qquad |\mathcal{B}| \neq 0, \qquad \text{car} \qquad |\mathrm{a}| \neq 0;$$
$$\mathcal{B}\overline{\mathcal{C}}' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{\mathcal{C}}' = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}' = 0, \qquad \text{car} \qquad |\mathcal{B}| \neq 0;$$
$$\mathcal{A} = \mathcal{C}\overline{\mathcal{C}}' = 0, \qquad \text{ce qui est absurde, car} \qquad |\mathcal{A}| \neq 0.$$

L'hypothèse $q' = q$ est ainsi forcée.

15° Supposons donc $q' = q$; cela revient à $\mathcal{C} = \mathcal{A} = 0$; il reste, pour l'identification, à faire $\mathrm{a} = \mathcal{B}\overline{\mathcal{B}}'$; a est une hermitienne q-aire; on a ainsi

$$\mathrm{E} = \mathrm{a}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{B}\overline{\mathcal{B}}'\mathrm{a}^{-\frac{1}{2}} = \left(\mathrm{a}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{B}\right)\overline{\left(\mathrm{a}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{B}\right)}',$$

$\mathrm{a}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{B} =$ l'unitaire q-aire u,

$$\mathcal{B} = \mathrm{a}^{\frac{1}{2}}u.$$

Je dis que *l'on peut toujours trouver une unitaire p-aire* U, *telle que* $\mathrm{BU}^{-1} = \mathfrak{A}_0^{\frac{1}{2}}$.

En effet, en vertu de ce qui précède,

$$\mathrm{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad q \quad} & \overbrace{\; p-q \;} \end{array} \\ \begin{vmatrix} \mathrm{a}^{\frac{1}{2}}u & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} q \\ p-q \end{array}, \qquad \text{tandis que} \qquad \mathfrak{A}_0^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} \mathrm{a}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$$

il suffit de prendre U telle que

$$\mathrm{U}(x, y) = u(x_1, \ldots, x_q; y_1, \ldots, y_q) + x_{q+1}y_{q+1} + \ldots + x_p y_p.$$

D'ailleurs, toute matrice

$$B = \mathfrak{A}_0^{\frac{1}{2}} U, \qquad U = \text{unitaire quelconque},$$

fournit l'hypohermitienne $\mathfrak{A}_0$ par le procédé $B\overline{B}'$.

16° De la canonique $\mathfrak{A}_0$ revenons à l'hypohermitienne générale $\mathfrak{A}$. On a la proposition suivante :

Théorème. — *Pour $\mathfrak{A}$ donnée, la formule générale des matrices* B, *telles que $\mathfrak{A} = B\overline{B}'$, est $B = \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} U$.*

Si, ce qui n'est ni plus ni moins général, on pose $B = \overline{P}'$, la formule devient

$$\overline{\left(\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} U\right)}' = U^{-1} \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$$

et coïncide avec celle des hermitiennes (*loc. cit.*, 28°, formule $P = U\sqrt{H}$).

17° Dans la présente analyse, je me suis préoccupé surtout d'établir l'existence et d'étudier les propriétés de l'hypohermitienne $\mathfrak{A}$, d'une canonisante U unitaire de $\mathfrak{A}$, de la formation $\mathfrak{A}^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\mathfrak{A}}$.

Comment construira-t-on effectivement $\mathfrak{A}^{\frac{1}{m}}$ et U?

Si l'on possède la forme canonique $\mathfrak{A}_0$ ainsi que U, le raisonnement du 9° donne immédiatement $\mathfrak{A}^{\frac{1}{m}}$ sous forme canonique, puis grâce à U sous forme non canonique.

Comment se procurer, pour $\mathfrak{A}$ donnée, la canonique $\mathfrak{A}_0$?

Les coefficients de $\mathfrak{A}_0$ sont immédiatement donnés par la résolution de l'équation caractéristique $\mathfrak{D}$. Le nombre des racines nulles de $\mathfrak{D}$ fait connaître le rang q.

Quant à la canonisante unitaire U, elle se laisse calculer de proche en proche (pour les ordres p, $p-1$, $p-2, \ldots$) par le procédé du 6°, dès qu'on sait résoudre le problème suivant :

Construire une unitaire U, *qui amène un point donné sur un autre point donné, savoir, dans l'espèce, sur le point*

$$x_1 = \ldots = x_{p-1} = 0, \qquad x_p = 1.$$

Or ce problème est traité d'une façon complète au Chapitre I du Mémoire : *Sur l'Hermitien.*

Bref, pour une hypohermitienne donnée $\mathfrak{A}$, les formations

$$U, \quad \mathfrak{A}_0, \quad \mathfrak{A}^{\frac{1}{m}}$$

doivent être considérées comme connues.

Hypohermitiennes réelles.

18° Si l'hypohermitienne $A = [a_{jk}]$ est réelle, $a_{jk} = \overline{a}_{jk}$, on a $\overline{A}' = A' = A$ et A est *symétrique.*

Théorème. — *Pour qu'une matrice réelle et symétrique* A *soit hypohermitienne, il faut et il suffit que la forme quadratique à variables* réelles

$$f(t) = \sum_{jk} a_{jk} t_j t_k = A(t, t), \qquad a_{jk} = a_{kj}$$

ne devienne jamais négative.

La condition est nécessaire, car $X = A(x, \overline{x}) \geqq 0$ (1°) pour tout x et, en particulier, pour $x = \overline{x} = t$.

Réciproquement, posons $x = u + iv$, u et v étant réels. On aura, à cause de la symétrie de A,

$$A(x, \overline{x}) = A(u + iv, u - iv) = A(u, u) + A(v, v)$$

et

$$X = A(x, \overline{x}) \geqq 0,$$

puisque $A(u, u)$ et $A(v, v) \geqq 0$.

Je n'insisterai pas davantage sur la théorie, aujourd'hui bien connue, des formes quadratiques $f(t)$. Si le rang de A est q, $f(t)$ sera la somme de q carrés positifs, etc., etc.

Pour une matrice U réelle, $\overline{U} = U$, la condition d'unitarité $U\overline{U}' = E$ devient celle d'orthogonalité, $UU' = E$. Toutes les propositions précédentes, concernant les hypohermitiennes, subsistent à condition de remplacer les unitaires U par des substitutions W réelles et orthogonales. $\mathcal{A}$ désignera une hypohermitienne réelle.

19° Théorème. — *Toute $\mathcal{A}$ est canonisable et admet au moins une canonisante* W.

La démonstration du 6° subsiste, car, ρ et a_{jk} étant réelles, les quantités ω_j seront réelles aussi ; l'intervention d'une W met A sous la forme

$$A(x, y) = a(x, y) + \rho x_p y_p, \qquad a = \text{réelle}, \qquad \ldots.$$

20° Théorème. — *Pour toute $\mathcal{A}$ il existe une et une seule hypohermitienne réelle $\mathcal{B}$, telle que $\mathcal{B}^m = \mathcal{A}$,* $m =$ entier *positif.*

La démonstration du 9° subsiste. La forme canonique $\mathcal{A}_0$ de $\mathcal{A}$ ne contient pas d'imaginaires et la construction de $\mathcal{B}$ ne saurait en introduire. $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\mathcal{A}}$.

21° Théorème. — *Toute $\mathcal{A}$ peut être obtenue par le procédé*

$$\mathcal{A} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}';$$

pour $\mathcal{A}$ donnée, la matrice réelle $\mathfrak{P}$ s'obtient par la formule $\mathfrak{P} = \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} W$, $W =$ arbitraire.

Toute l'analyse précédente (10° à 16°) subsiste sans sortir du réel.

Dans le lemme du 11°, on envisagera l'hypohermitienne réelle $\mathcal{L}$ telle que

$$\mathcal{L}(x, x) = \sum_r C_r^2, \qquad \overline{C_r} = C_r, \qquad \ldots.$$

22° Le calcul effectif, pour une hypohermitienne réelle donnée $\mathcal{A}$, des formations

$$\mathcal{A}^{\frac{1}{m}}, \quad \mathcal{A}_0 \text{ ou forme canonique,}$$

W ou canonisante réelle et orthogonale, se fait par les procédés du 17° et ne présente aucune difficulté.

Les matrices réelles $\mathcal{A}^{\frac{1}{m}}$, $\mathcal{A}_0$, W doivent être considérées comme connues, dès que $\mathcal{A}$ est donnée.