E. ESTANAVE

Sur les coefficients des développements en séries de *tangx*, *scx* et d'autres fonctions. Leur expression à l'aide d'un déterminant unique

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 203-208
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__203_1>

SUR LES COEFFICIENTS DES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{séc} x$ ET D'AUTRES FONCTIONS. LEUR EXPRESSION A L'AIDE D'UN DÉTERMINANT UNIQUE;

Par M. E. Estanave.

Dans une précédente Communication (¹) j'ai montré que la

(¹) *Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXX, p. 220.

considération des nombres A_n imaginés par M. Désiré André dans un Mémoire sur les permutations alternées (*Journal de Liouville*, 1881, p. 167) pouvait, avec avantage, être substituée à la considération d'autres séries de nombres, tels que les nombres d'Euler, de Bernoulli, de Genocchi, etc., qui apparaissent dans les développements en séries de $\operatorname{tang} x$, de $\operatorname{séc} x$ et aussi dans la sommation de suites numériques importantes. Ces derniers nombres forment, en effet, des suites assez disparates, les unes formées de nombres entiers, les autres de nombres fractionnaires, tandis que les nombres A forment une suite de nombres entiers qui ont une signification combinatoire simple et par suite une existence indépendante des développements dans lesquels ils entrent comme coefficients.

Rappelons que, à l'aide de ces nombres A, les développements de $\operatorname{tang} x$ et de $\operatorname{séc} x$ s'écrivent

$$\operatorname{tang} x = A_1 \frac{x}{1!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + A_5 \frac{x^5}{5!} + \ldots + A_{2p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + \ldots,$$

$$\operatorname{séc} x \;= A_0 + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_4 \frac{x^4}{4!} + \ldots + A_{2p} \frac{x^{2p}}{2p!} + \ldots.$$

Si nous comparons ces développements à ceux déjà établis à l'aide des nombres de Bernoulli (B) et des nombres d'Euler (E), nous voyons que ces nombres sont liés aux nombres A par les relations

$$(1) \qquad A_{2p-1} = \frac{2^{2p}(2^{2p}-1)}{2p} B_p, \qquad A_{2p} = E_p.$$

Ayant déjà montré que les suites des nombres B_p, E_p peuvent être remplacées par une suite unique de nombres entiers A_n, pour lesquels j'ai indiqué un caractère remarquable de périodicité du chiffre des unités, je me suis proposé ici de donner une représentation par les déterminants de ces nombres A. Il s'ensuivra que les nombres B_p, E_p dont on a des représentations indépendantes diverses, que je signale ci-dessous, trouveront une représentation unique dans l'expression de A_n, grâce aux relations (1) qui lient ces nombres aux nombres A_n.

Or les nombres d'Euler, de Bernoulli ont été exprimés par divers auteurs, MM. Glaisher, Haussner, etc., à l'aide de déterminants. Bien que la dépendance de ces nombres ait été démontrée, on a donné de ces nombres une représentation indépendante.

Ainsi les nombres de Bernoulli ont été exprimés par les déterminants

$$B_p = (-1)^{p+1} 2p! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ \frac{1}{(2p+1)!} & \frac{1}{2p!} & \frac{1}{(2p-1)!} & . & \ldots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix},$$

où B_p est exprimé à l'aide d'un déterminant d'ordre $2p$,

$$B_p = \frac{2p(-1)^{p-1}}{2^{2p}(2^{2p}-1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ C_3^1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ C_5^1 & C_5^3 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & . & \ldots & . & 1 \\ C_{2p-3}^1 & C_{2p-3}^3 & C_{2p-3}^5 & \ldots & 1 & 1 \\ C_{2p-1}^1 & C_{2p-1}^3 & C_{2p-1}^5 & \ldots & C_{2p-1}^{2p-3} & 1 \end{vmatrix},$$

qui est un déterminant d'ordre p.

J'avais indiqué aussi la représentation suivante pour B_p

$$B_p = \frac{(-1)^{p+2} 2p!}{2(2^{2p-1}-1)} \begin{vmatrix} -\frac{1}{3!} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{5!} & -\frac{1}{3!} & . & . & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots\ldots & . & . & \ldots & . \\ \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} & \frac{(-1)^{p-1}}{(2p-1)!} & . & . & \ldots & \frac{(-1)^{2p+1}}{3!} \end{vmatrix}.$$

De même des nombres d'Euler on a diverses représentations à l'aide de déterminants

$$E_p = (-1)^k \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ C_4^2 & -1 & 0 & \ldots & 1 \\ C_6^2 & -C_6^4 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots\ldots & . & \ldots & . \\ C_{2p}^2 & -C_{2p}^4 & C_{2p}^6 & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

k étant le plus grand entier contenu dans $\frac{p}{2}$, expression de E_p

sous forme d'un déterminant d'ordre p, que l'on obtient en partant de la formule de récurrence qui définit E_p. Ou encore la forme que j'ai indiquée

$$E_p = 2^{2p}\,2p!\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3!} & 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2^2.3!} \\ \frac{1}{5!} & -\frac{1}{3!} & 1 & \dots & 0 & \frac{1}{2^4.5!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} & \frac{(-1)^{p-1}}{(2p-1)!} & \dots & \dots & \dots & \frac{(-1)^{p+2}}{2^{2p}(2p+1)!} \end{vmatrix}.$$

E_p est ainsi exprimé à l'aide d'un déterminant d'ordre $p+1$ qu'il serait facile de réduire à un déterminant d'ordre p en retranchant les éléments de la première et de la dernière colonne.

De la comparaison de ces diverses expressions, on peut déduire des identités entre déterminants, qu'il pourrait être malaisé d'établir directement.

Pour avoir une représentation unique pour les nombres A_n, considérons la relation suivante indiquée par M. D. André

$$\begin{aligned} &2C_n^{n-1}A_1 + (-1)^{n-1}2^2C_n^{n-2}A_2 - 2^3C_n^{n-3}A_3 + (-1)^{n-2}2^4C_n^{n-4}A_4 + \dots \\ &+ (-1)^{n-p}2^{2p}C_n^{n-2p}A_{2p} + (-1)^p 2^{2p+1}C_n^{n-(2p+1)}A_{2p+1} + \dots + (-1)^h 2^n C_n^0 A_n = 1 + (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

h étant la partie entière de $\frac{n}{2}$, relation que nous pouvons écrire d'une manière plus condensée

$$\sum_{q=0}^{q=\frac{n-1}{2}} (-1)^q 2^{2q+1} C_n^{n-(2q+1)} A_{2q+1} + \sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} (-1)^{n-p} 2^{2p} C_n^{n-2p} A_{2p} = (-1)^{n+1} + 1.$$

Dans le cas où n est pair q prendra les valeurs $0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}$ et p les valeurs $1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2}$, et si n est impair q prendra les valeurs $0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ et p les valeurs $1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$.

Si nous donnons à n les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, nous obtenons les n équations linéaires à n inconnues $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ suivantes :

$$\begin{aligned}
&2C_1^0 A_1 &&= 2,\\
&2C_2^1 A_1 - 2^2 C_2^0 A_2 &&= 0,\\
&2C_3^2 A_1 + 2^2 C_3^1 A_2 - 2^3 C_3^0 A_3 &&= 2,\\
&2C_4^3 A_1 - 2^2 C_4^2 A_2 - 2^3 C_4^1 A_3 + 2^4 C_4^0 A_4 &&= 0,\\
&2C_5^4 A_1 + 2^2 C_5^3 A_2 - 2^3 C_5^2 A_3 - 2^4 C_5^1 A_4 + 2^5 C_5^0 A_5 &&= 2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&,
\end{aligned}$$

$$2C_n^{n-1} A_1 + (-1)^{n-1} 2^2 C_n^{n-2} A_2 - 2^3 C_n^{n-3} A_3 + (-1)^{n-2} 2^4 C_n^{n-4} A_4 + \ldots$$
$$+ (-1)^h 2^n C_n^0 A_n = 1 + (-1)^{n+1}.$$

De ces équations on tire la valeur de A_n

$$A_n = \frac{(-1)^k}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}} \begin{vmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\\
2C_2^1 & -2^2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
2C_3^2 & 2^2 C_3^1 & -2^3 & 0 & 0 & \ldots & 2\\
2C_4^3 & -2^2 C_4^2 & -2^3 C_4^1 & 2^4 & 0 & \ldots & 0\\
2C_5^4 & 2^2 C_5^3 & -2^3 C_5^2 & -2^4 C_5^1 & 2^5 & \ldots & 2\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
2C_n^{n-1} & (-1)^{n-1} 2^2 C_n^{n-2} & -2^3 C_n^{n-3} & (-1)^{n-2} 2^4 C_n^{n-4} & 2^5 C_n^{n-5} & \ldots & 1+(-1)^n
\end{vmatrix}$$

qui est la représentation de A_n à l'aide d'un déterminant d'ordre n. Dans cette expression k est impair toutes les fois que $\frac{n-2}{4}$ est entier et k est pair dans tous les autres cas. En sorte que le signe à prendre devant le déterminant sera le signe — ou le signe $+$, suivant que $\frac{n-2}{4}$ sera ou ne sera pas entier.

Cela étant, remarquons que le déterminant ci-dessus, que j'ai écrit sous cette forme transitoire, uniquement pour faciliter la lecture, se simplifie ; la première et la dernière colonnes sont divisibles par 2, la deuxième est divisible par 2^2, la troisième par 2^3 et ainsi de suite la colonne de rang p est divisible par 2^p. Il résulte que ce déterminant est divisible par $2^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$.

Nous avons par suite pour A_n, en remarquant que $C_m^p = C_m^{m-p}$, la représentation suivante, à l'aide d'un déterminant d'ordre n,

$$A_n = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ C_2^1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_3^1 & C_3^2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ C_4^1 & -C_4^2 & -C_4^3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ C_5^1 & C_5^2 & -C_5^3 & -C_5^4 & 1 & \dots & . \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & . & \dots & . \\ C_n^1 & (-1)^{n-1} C_n^2 & -C_n^3 & (-1)^{n-2} C_n^4 & C_n^5 & \dots & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \end{vmatrix}.$$

Comme vérification, si l'on donne à n les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, ..., on trouve facilement

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad A_3 = 2, \quad A_4 = 5, \quad A_5 = 16, \quad \dots,$$

qui sont bien les valeurs des cinq premiers nombres de M. André.