BULLETIN DE LA S. M. F.

A. BOULANGER

Sur les équations différentielles du troisième ordre, qui admettent un groupe continu de transformations

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 290-299
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__290_1>

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TROISIÈME ORDRE QUI ADMETTENT UN GROUPE CONTINU DE TRANSFORMATIONS;

Par M. A. BOULANGER.

1. Je me propose de déterminer toutes les équations différentielles du troisième ordre

$$(1) \qquad y''' = R(x, y, y', y''),$$

où R est rationnel en y'', y', analytique en y et x, qui admettent un groupe continu de transformations de la forme

$$(\Gamma) \qquad X = x, \qquad Y = F(x, y, a, b, c),$$

où F, *rationnel en y*, analytique en x, dépend essentiellement des trois paramètres a, b, c.

D'après un théorème très général de M. Painlevé ([1]), les équations qui admettent un tel groupe (Γ) transitif ont leurs points critiques fixes. A la vérité, de par la théorie des groupes, ces équations se ramènent à des combinaisons d'équations linéaires et de quadratures; mais on pourrait espérer que les inversions entraînées par cette réduction conduisent à des transcendantes uniformes nouvelles. Dans le cas du groupe (Γ), il n'en est rien, et nous allons établir ce résultat :

Les seules équations qui répondent à la question sont des équations linéaires ou se déduisent des équations linéaires par

---

([1]) P. PAINLEVÉ, *Sur une relation entre la théorie des groupes continus et les équations différentielles à points critiques fixes* (*Comptes rendus*, t. CXXX, p. 1171, 30 avril 1900); *voir* aussi *Acta Mathematica*, t. XXV.

une transformation homographique effectuée sur la fonction y, suivie ou non du changement de fonction $y = e^z$.

2. Les transformations infinitésimales de tout groupe (Γ) sont de la forme

$$(2)\qquad \mathrm{X} = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \xi \equiv 0, \qquad \eta = \alpha + \beta y + \gamma y^2,$$

α, β, γ étant des fonctions analytiques de x. De plus, toute telle transformation peut, si l'on opère sur y une homographie convenable à coefficients fonctions de x, être ramenée à l'une des deux formes réduites

$$(3)\qquad \xi \equiv 0, \qquad \eta = \delta y,$$

$$(4)\qquad \xi \equiv 0, \qquad \eta = \varepsilon,$$

δ et ε dépendant de x.

D'autre part, d'après S. Lie (1), tout groupe de transformations infinitésimales à trois paramètres peut, par un choix convenable de trois transformations indépendantes $\mathrm{X}_1 f$, $\mathrm{X}_2 f$, $\mathrm{X}_3 f$ prises dans la famille des transformations du groupe, être ramené à vérifier l'un des systèmes suivants :

$$
\begin{array}{llll}
(\mathrm{A}) & (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2) \equiv \mathrm{X}_1 f, & (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_3) \equiv 2\mathrm{X}_2 f, & (\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3) \equiv \mathrm{X}_3 f,\\
(\mathrm{B}) & (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2) \equiv 0, & (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_3) \equiv \mathrm{X}_1 f, & (\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3) \equiv c\mathrm{X}_2 f \quad (c \neq 0, \neq 1),\\
(\mathrm{C}) & (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2) \equiv 0, & (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_3) \equiv \mathrm{X}_1 f, & (\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3) \equiv \mathrm{X}_2 f,\\
(\mathrm{D}) & (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2) \equiv 0, & (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_3) \equiv \mathrm{X}_1 f, & (\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3) \equiv \mathrm{X}_1 f + \mathrm{X}_2 f,\\
(\mathrm{E}) & (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2) \equiv 0, & (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_3) \equiv \mathrm{X}_1 f, & (\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3) \equiv 0,\\
(\mathrm{F}) & (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2) \equiv 0, & (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_3) \equiv 0, & (\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3) \equiv \mathrm{X}_1 f,\\
(\mathrm{G}) & (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2) \equiv 0, & (\mathrm{X}_1\mathrm{X}_3) \equiv 0, & (\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3) \equiv 0.
\end{array}
$$

Exprimons que trois transformations (2), distinguées par des indices, vérifient l'un de ces systèmes.

Les cas (B), (D), (E), (F) conduisent de suite à des impossibilités.

Dans le cas (G), $\frac{\eta_3}{\eta_1}$ et $\frac{\eta_2}{\eta_1}$ ne dépendent que de x; les trois

(1) *Voir*, par exemple, S. Lie, *Th. der Transformationgruppen*, t. III, p. 715, 716 ou Lie et Scheffers, *Vorlesungen über Differentialgleichungen*, p. 490.

transformations se réduisent simultanément à la forme (3) ou à la forme (4); de là les deux types :

$$(\Gamma_4)\qquad \boxed{X_1 f = \delta_1 y \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_2 f = \delta_2 y \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_3 f = \delta_3 y \frac{\partial f}{\partial y}},$$

$$(\Gamma_3)\qquad \boxed{X_1 f = \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_2 f = \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_3 f = \varepsilon_3 \frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Dans le cas (C), $\frac{\eta_2}{\eta_1}$ ne dépend que de x. On peut donc prendre

$$X_1 f = \delta_1 y \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_2 f = \delta_2 y \frac{\partial f}{\partial y},$$

ou bien

$$X_1 f = \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_2 f = \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Les deuxième et troisième identités (C) conduisent alors à trois conditions entre les coefficients α_3, β_3, γ_3 de $X_3 f$, et qui sont contradictoires avec la première forme de $X_1 f$, $X_2 f$, tandis qu'elles donnent avec la seconde $X_3 f = (\alpha_3 - y)\frac{\partial f}{\partial y}$; en changeant y en $\alpha_3 - y$, on a le type canonique

$$(\Gamma_2)\qquad \boxed{X_1 f = \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_2 f = \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_3 f = y \frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Enfin, dans le cas (A), on a neuf relations entre les coefficients α, β, γ de $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$:

$$\begin{aligned} \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 &= \alpha_1, & \ldots,\\ 2(\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2) &= \beta_1, & \ldots,\\ \beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2 &= \gamma_1, & \ldots. \end{aligned}$$

On reconnaît de suite qu'on ne peut supposer réductible à la forme δy ni η_1, ni η_3, pas plus que η_2 à la forme ε. Si η_2 est réductible à la forme $\delta_2 y$, on trouve d'abord $\delta_2 = \pm 1$; pour $\delta_2 = -1$, on est conduit à

$$X_1 f = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_2 f = -y \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_3 f = \frac{1}{\alpha_1} y^2 \frac{\partial f}{\partial y};$$

pour $\delta_2 = +1$, on obtient un système qui se ramène à celui-ci en changeant y en $\frac{1}{y}$. Si η_3 est réductible à la forme ε_3, on trouve

$$X_1 f = \frac{(\alpha_2 + y)^2}{\varepsilon_3} \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_2 f = (\alpha_2 + y) \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_3 f = \varepsilon_3 \frac{\partial f}{\partial y},$$

et, en changeant y en $y - \alpha_2$, on est ramené au type précédent. Résultat analogue avec $\eta_1 = \varepsilon$. On a donc la quatrième et dernière forme réduite

$$(\Gamma_1) \qquad \boxed{X_1 f = \frac{1}{\varepsilon} y^2 \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_2 f = y \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_3 f = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Les transformations infinitésimales prolongées jusqu'au troisième ordre sont

1° Pour $\xi \equiv 0$, $\eta = \varepsilon(x)$

$$\mathfrak{V} f = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon' \frac{\partial f}{\partial y'} + \varepsilon'' \frac{\partial f}{\partial y''} + \varepsilon''' \frac{\partial f}{\partial y'''};$$

2° Pour $\xi \equiv 0$, $\eta = y$

$$\mathfrak{V} f = y \frac{\partial f}{\partial y} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} + y'' \frac{\partial f}{\partial y''} + y''' \frac{\partial f}{\partial y'''};$$

3° Pour $\xi \equiv 0$, $\eta = \delta y$

$$\begin{aligned} \mathfrak{V} f = {} & \delta y \frac{\partial f}{\partial y} + (\delta' y + \delta y') \frac{\partial f}{\partial y'} \\ & + (\delta'' y + 2\delta' y' + \delta y'') \frac{\partial f}{\partial y''} + (\delta''' y + 3\delta'' y' + 3\delta' y'' + \delta y''') \frac{\partial f}{\partial y'''}. \end{aligned}$$

3. Considérons maintenant l'équation (1)

$$y''' = \mathrm{R}(x, y, y', y''),$$

et supposons qu'elle admette un groupe (Γ). La transformation homographique qui ramène les transformations infinitésimales de ce groupe à l'un des types canoniques $\Gamma_i (i = 1, 2, 3, 4)$ change cette équation en une autre de même forme

$$(5) \qquad y''' = \mathcal{R}(x, y, y', y''),$$

où $\mathcal{R}$ est rationnel en y'', y', analytique en y, x. Nous allons exprimer que cette équation (5) admet les trois transformations infinitésimales Γ_i.

Mais, en vertu du théorème de M. Painlevé, cette équation (5) doit avoir ses points critiques fixes, ce qui précise déjà la forme de $\mathcal{R}$, en tant que fonction de y'' et de y'. D'après les résultats démontrés par M. Painlevé ([1]), l'équation (4) est de la forme

$$y''' = Ay''^2 + By'' + C; \tag{6}$$

de plus, A, regardé comme fonction de y', n'a que des pôles simples, au nombre de trois au plus :

$$A = \frac{m}{y'+a} + \frac{n}{y'+b} + \frac{p}{y'+c},$$

m, n, p étant certains nombres commensurables, qui peuvent être nuls, et a, b, c étant des fonctions analytiques de x et y.

Enfin, B et C n'ont que des pôles simples en y', coïncidant nécessairement avec ceux de A, et $\frac{B}{y'}$, $\frac{C}{y'^3}$ restent finis pour $y' = \infty$; d'où l'on déduit

$$B = \lambda y' + \mu + \frac{m_1}{y'+a} + \frac{n_1}{y'+b} + \frac{p_1}{y'+c},$$

$$C = \nu y'^3 + \rho y'^2 + \sigma y' + \tau + \frac{m_2}{y'+a} + \frac{n_2}{y'+b} + \frac{p_2}{y'+c};$$

m_1, n_1, ..., p_2 sont des fonctions de x et de y telles que si $p = 0$ par exemple, on a aussi

$$p_1 = p_2 = 0;$$

λ, μ, ν, ..., τ sont des fonctions de y et de x.

4. Examinons d'abord le cas où $A \equiv 0$. L'équation est de la forme

$$y''' = (\lambda y' + \mu)y'' + \nu y'^3 + \rho y'^2 + \sigma y' + \tau.$$

Pour qu'elle admette la transformation prolongée

$$U f = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon' \frac{\partial f}{\partial y'} + \varepsilon'' \frac{\partial f}{\partial y''} + \varepsilon''' \frac{\partial f}{\partial y'''},$$

([1]) P. Painlevé, *Sur les équations du troisième ordre à points critiques fixes* (*Comptes rendus*, t. CXXX, p. 879; 2 avril 1900); *voir* aussi *Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme* (*Soc. Math.*, t. XXVIII, 1900).

il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$-\varepsilon''' + \varepsilon''(\lambda y' + \mu) + \varepsilon'(\lambda y'' + 3\nu y'^2 + 2\rho y' + \sigma)$$
$$+ \varepsilon\left(y y'' \frac{\partial\lambda}{\partial y} + y'' \frac{\partial\mu}{\partial y} + y'^3 \frac{\partial\nu}{\partial y} + y'^2 \frac{\partial\rho}{\partial y} + y' \frac{\partial\sigma}{\partial y} + \frac{\partial\tau}{\partial y}\right) = 0.$$

De là les conditions

$$(e)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial y} = 0, \qquad \dfrac{\partial\nu}{\partial y} = 0, \qquad \varepsilon\dfrac{\partial\rho}{\partial y} + 3\varepsilon'\nu = 0, \qquad \varepsilon\dfrac{\partial\mu}{\partial y} + \varepsilon'\lambda = 0, \\ \varepsilon\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} + 2\varepsilon'\rho + \varepsilon''\lambda = 0, \qquad \varepsilon\dfrac{\partial\tau}{\partial y} + \varepsilon'\sigma + \varepsilon''\mu - \varepsilon''' = 0. \end{cases}$$

1° Ces seules relations montrent que, s'il y a deux fonctions distinctes ε_1 et ε_2 les vérifiant (types Γ_2 et Γ_3), on doit avoir

$$\lambda = \nu = \rho = 0.$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{\partial\sigma}{\partial y} = 0$$

et

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon}[\varepsilon''' - \varepsilon''\mu(x) + \varepsilon'\sigma(x)] = f(x),$$

c'est-à-dire

$$\tau = y f(x) + g(x).$$

L'équation se réduit à

$$y''' = \mu(x) y'' + \sigma(x) y' + f(x) y + g(x);$$

c'est une équation linéaire non homogène. Les valeurs de ε vérifient l'équation sans dernier terme

$$\varepsilon''' = \mu(x)\varepsilon'' + \sigma(x)\varepsilon' + f(x)\varepsilon.$$

2° Dans le cas du type (Γ_1), les coefficients de l'équation doivent vérifier les relations (e) et aussi celles qui expriment que l'équation admet la transformation prolongée

$$\mathrm{U}f = y\frac{\partial f}{\partial y} + y'\frac{\partial f}{\partial y'} + y''\frac{\partial f}{\partial y''} + y'''\frac{\partial f}{\partial y'''},$$

c'est-à-dire qui expriment que l'on a identiquement

$$y\left(y y'' \frac{\partial\lambda}{\partial y} + y'' \frac{\partial\mu}{\partial y} + y'^3 \frac{\partial\nu}{\partial y} + y'^2 \frac{\partial\rho}{\partial y} + y' \frac{\partial\sigma}{\partial y} + \frac{\partial\tau}{\partial y}\right)$$
$$+ y'(\lambda y'' + 3\nu y'^2 + 2\rho y' + \sigma) - \nu y'^3 - \rho y'^2 - \sigma y' - \tau \equiv 0.$$

On déduit de là

$$(e')\qquad \left\{\begin{array}{lll} \lambda = 0, & \dfrac{\partial\mu}{\partial y} = 0, & y\dfrac{\partial\nu}{\partial y} + 2\nu = 0, \\ y\dfrac{\partial\rho}{\partial y} + \rho = 0, & \dfrac{\partial\sigma}{\partial y} = 0, & y\dfrac{\partial\tau}{\partial y} - \tau = 0. \end{array}\right.$$

Les équations (e) et (e') entraînent

$$\lambda = \nu = \rho = 0$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{\partial\sigma}{\partial y} = 0,$$

et

$$\tau = y f(x).$$

L'équation (5) correspondante est donc linéaire et homogène.

Recherchons enfin les conditions pour que l'équation admette les transformations (Γ_4). Elles résultent de l'identité

$$\begin{aligned} -[\delta''' y + 3\delta'' y' + 3\delta' y'' + \delta(\lambda y'' y' + \mu y'' + \nu y'^3 + \rho y'^2 + \sigma y' + \tau)] \\ + (\delta'' y + 2\delta' y' + \delta y'')(\lambda y' + \mu) \\ + (\delta' y + \delta y')(\lambda y'' + 3\nu y'^2 + 2\rho y' + \sigma) \\ + \delta y\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y} y'' y' + \frac{\partial\mu}{\partial y} y'' + \frac{\partial\nu}{\partial y} y'^3 + \frac{\partial\rho}{\partial y} y'^2 + \frac{\partial\sigma}{\partial y} y' + \frac{\partial\tau}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned}$$

On obtient d'abord

$$\lambda + y\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0, \qquad (\lambda y - 3)\delta' + \frac{\partial\mu}{\partial y}\delta = 0.$$

Cette seconde relation, devant être vérifiée par trois valeurs distinctes de δ, entraîne

$$\lambda = \frac{3}{y}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial y} = 0.$$

On a ensuite

$$2\nu + y\frac{\partial\nu}{\partial y} = 0, \qquad (2\lambda + 3\nu y)\delta' + \left(\rho + y\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)\delta = 0;$$

d'où

$$\nu = -\frac{2}{y^2}, \qquad \frac{\partial(\rho y)}{\partial x} = 0.$$

En tenant compte de ces résultats, les conditions suivantes s'écrivent

$$2(\mu + \rho y)\delta' + y\frac{\partial\sigma}{\partial y}\delta = 0,$$

$$-\delta''' + \mu\delta'' + \sigma\delta' + \left(-\frac{\tau}{y} + \frac{\partial\tau}{\partial y}\right)\delta = 0,$$

d'où

$$\rho = -\frac{\mu(x)}{y}, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial y} = 0,$$

$$y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau}{y}\right) = f(x),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\tau}{y} = f(x)\,\mathrm{Log}\,y + g(x).$$

L'équation (5) s'écrit alors

$$y''' = \frac{3yy'y'' - 2y'^3}{y^2} + \mu(x)\frac{yy'' - y'^2}{y} + \sigma(x)y' + f(x)y\,\mathrm{Log}\,y + y\,g(x),$$

ou

$$\left(\frac{y'}{y}\right)'' = \mu(x)\left(\frac{y'}{y}\right)' + \sigma(x)\frac{y'}{y} + f(x)\,\mathrm{Log}\,y + g(x).$$

En posant $y = e^z$, on est ramené à une équation linéaire en z.

5. Considérons maintenant le cas où $A \equiv 0$. En aucun cas, l'équation

$$\begin{aligned} y''' = {} & y''^2\left(\frac{m}{y'+a} + \frac{n}{y'+b} + \frac{p}{y'+c}\right) \\ & + y''\left(\frac{m_1}{y'+a} + \frac{n_1}{y'+b} + \frac{p_1}{y'+c} + \lambda y' + \mu\right) \\ & + \frac{m_2}{y'+a} + \frac{n^2}{y'+b} + \frac{p_2}{y'+c} + \nu y'^3 + \rho y'^2 + \sigma y' + \tau \end{aligned}$$

ne saurait admettre les transformations (Γ_i) $(i = 2, 3, 4)$. En effet, en prenant, dans l'identité qui exprime l'existence de la transformation prolongée

$$\mho f = y\frac{\partial f}{\partial y} + y'\frac{\partial f}{\partial y'} + y''\frac{\partial f}{\partial y''} + y'''\frac{\partial f}{\partial y'''},$$

les termes en y''^2 et en annulant, on obtient

$$\sum \frac{m}{(y'+a)^2}\left(a - y\frac{\partial a}{\partial y}\right) = 0;$$

en opérant de même pour la transformation prolongée

$$\mho f = \varepsilon\frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon'\frac{\partial f}{\partial y'} + \varepsilon''\frac{\partial f}{\partial y''} + \varepsilon'''\frac{\partial f}{\partial y'''},$$

on trouve

$$\sum \frac{m}{(y'+a)^2}\left(\varepsilon' + \varepsilon \frac{\partial a}{\partial y}\right) = 0;$$

enfin, en prenant la transformation $Xf = \delta y \frac{\partial f}{\partial y}$, on arrive à

$$\sum \frac{m}{(y'+a)^2}\left[\delta\left(a - y\frac{\partial a}{\partial y}\right) - \delta' y\right] = 0.$$

Si m, n, p ne sont pas tous nuls, on aurait des identités de la forme

$$\varepsilon' + \varepsilon \frac{\partial a}{\partial y} = 0$$

ou

$$\delta' y - \delta\left(a - y\frac{\partial a}{\partial y}\right) = 0,$$

qui ne peuvent être vérifiées par plusieurs fonctions distinctes ε ou δ; d'où l'impossibilité des groupes Γ_2, Γ_3, Γ_4.

Pour le type Γ_1, si plus d'une des quantités m, n, p est différente de zéro, il y a aussi impossibilité; soit, par exemple, $mn \gtrless 0$, on a

$$\varepsilon' = -\varepsilon \frac{\partial a}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\partial b}{\partial y}$$

et

$$a = y\frac{\partial a}{\partial y}, \qquad b = y\frac{\partial b}{\partial y};$$

par suite $a = b$; ces deux pôles ne seraient pas distincts.

Il ne reste à examiner que le cas où m seul serait différent de zéro et où le groupe serait du type Γ_1. Eu égard aux conditions

$$a - y\frac{\partial a}{\partial y} = 0, \qquad \varepsilon' + \varepsilon\frac{\partial a}{\partial y} = 0,$$

la considération des termes en y'', dans les mêmes identités, conduit, pour la première transformation, à

$$\frac{\partial m_1}{\partial y} = m_1,$$

et, pour la seconde, à

$$2\varepsilon'' m + \varepsilon \frac{\partial m_1}{\partial y} = 0.$$

On conclut de là $\frac{\partial m_1}{\partial y} = 0$, puis $m = 0$, d'où contradiction.

6. En résumé, si $A \not\equiv 0$, l'équation (5) ne peut admettre un groupe (Γ), et si $A \equiv 0$, elle ne le peut que si elle est linéaire ou réductible à une équation linéaire par le changement de fonction $y = e^z$.

Le théorème énoncé est donc complètement établi.

Ainsi, le groupe très simple (Γ) n'a pas conduit à des équations à points critiques fixes nouvelles. On pourrait alors se proposer d'étendre la question aux groupes

$$X = x, \qquad Y = F(x, y),$$

où F est *algébrique* en y et dépend de trois paramètres distincts.