G. HUMBERT

Sur les tétraèdres inscrits et circonscrits à des quadriques

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 135-145

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__135_1>

SUR LES TÉTRAÈDRES INSCRITS ET CIRCONSCRITS A DES QUADRIQUES;

Par M. G. Humbert.

1. On se propose, dans ce travail, d'examiner s'il existe un théorème analogue à celui de Poncelet pour les tétraèdres inscrits à une quadrique par leurs sommets et circonscrits à une ou deux autres par leurs faces.

2. Tout d'abord on reconnaît aisément qu'il y a toujours une infinité quadruple de tétraèdres inscrits à une quadrique, A, et circonscrits à une autre, B, choisie au hasard; et ce résultat concorde avec celui que donne *a priori* la comparaison du nombre des paramètres avec celui des équations.

Mais en ce cas le tétraèdre *ne se ferme pas* toujours, c'est-à-dire que, si l'on se donne au hasard trois faces d'un tétraèdre, pourvu qu'elles touchent B et que leur point commun soit sur A, la quatrième face, qui est évidemment déterminée, ne touche pas nécessairement B. Pour qu'il en soit ainsi, c'est-à-dire pour que le tétraèdre se ferme toujours, il est évidemment nécessaire et suffisant que les tétraèdres inscrits à A et circonscrits à B soient en nombre *cinq fois infini*. D'ailleurs ils ne peuvent, en aucun cas, être en nombre six fois infini.

Dès lors, pour généraliser le théorème de Poncelet, il faudra rechercher à quelles conditions les tétraèdres inscrits à A et circonscrits à B formeront une série quintuplement infinie.

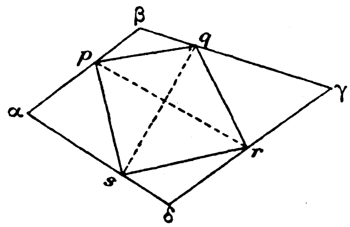
Avant d'énoncer le théorème qui donne la solution de ce problème, nous établirons un lemme préliminaire :

3. Lemme I. — *Soient* A *et* B *deux surfaces du second ordre quadritangentes; désignons par m un point quelconque de* A, *par* C *le cône de sommet m circonscrit à* B, *par* Π *un plan quelconque tangent à* B : je dis que Π *coupe* A *et* C *suivant deux coniques telles qu'on puisse inscrire à la première un triangle circonscrit à la seconde.*

Soient en effet (*fig.* 1) $\alpha\beta\gamma\delta$ le quadrilatère qui est la perspective sur le plan Π, à partir du point m, du quadrilatère gauche que forment dans l'espace les quatre génératrices communes à A et à B; le plan Π coupe les quatre faces de ce quadrilatère gauche suivant les droites pq, qr, rs, sp, qui forment évidemment un quadrilatère inscrit au quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ (¹).

Cela posé, observons que le cône C (de sommet m) coupe Π suivant une conique, qui touche les côtés du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ et

Fig. 1.



les deux droites pr et qs; car : 1° les côtés de $\alpha\beta\gamma\delta$ sont la perspective sur Π, à partir de m, de quatre génératrices de la quadrique B à laquelle C est circonscrit; 2° les droites pr et qs sont les deux génératrices suivant lesquelles le plan Π coupe la quadrique B à laquelle il est tangent.

D'un autre côté, la quadrique A coupe Π suivant une conique qui passe par les points p, q, r, s, et aussi par le point de rencontre de $\alpha\beta$ avec $\delta\gamma$: car une des génératrices de la quadrique A issues du point m s'appuie sur les deux génératrices qui ont pour perspective, à partir de ce point, les droites $\alpha\beta$ et $\delta\gamma$; elle coupe donc le plan Π au point d'intersection de ces deux droites.

Dès lors, le triangle dont les côtés sont $\alpha\beta$, pr et $\delta\gamma$ est inscrit à la conique section de A par Π; et il est circonscrit à la conique section de C par Π, ce qui établit le lemme.

4. Théorème I. — *Étant données deux surfaces du second ordre,* A *et* B, *quadritangentes, il existe un infinité quintuple*

(¹) Il est clair, de plus, que les droites pq et sr se coupent sur la diagonale $\alpha\gamma$, et les droites ps et qr sur la diagonale $\beta\delta$; mais cette remarque nous sera inutile.

de tétraèdres inscrits à l'une par leurs sommets et circonscrits à l'autre par leurs faces.

Sous une autre forme :

De quelque façon qu'on commence et qu'on poursuive la construction d'un tétraèdre, inscrit à A *et circonscrit à* B, *la construction aboutira toujours.*

Réciproquement, *cette propriété n'appartient à deux quadriques que si elles sont quadritangentes.*

5. Démontrons d'abord la proposition directe.

En vertu du lemme I et du théorème de Poncelet, il existe une infinité simple de triangles dans le plan Π, inscrits à la section de A et circonscrits à la section de C par ce plan ; sous une autre forme, il existe une infinité simple de trièdres circonscrits au cône C et dont les arêtes s'appuient sur la conique section de A par Π. Observons maintenant que les faces de ces trièdres touchent la quadrique B, à laquelle le cône C est circonscrit à partir de m : nous pouvons dire, en considérant le tétraèdre formé par un des trièdres et par le plan Π, qu'il y a une infinité *simple* de tétraèdres inscrits à A et circonscrits à B, ayant pour sommet un point *quelconque,* m, de A et pour face opposée un plan tangent *quelconque,* Π, de B ; donc une infinité *quintuple* de tétraèdres inscrits à A et circonscrits à B.

De quelque façon qu'on choisisse trois faces d'un tétraèdre, pourvu, bien entendu, qu'elles touchent B et qu'elles se coupent sur A (en un point m), le tétraèdre pourra s'achever : car, d'après ce qui précède, il y a une *triple* infinité de tétraèdres inscrits à A et circonscrits à B ayant m pour sommet, c'est-à-dire qu'on peut choisir arbitrairement les trois faces qui passent par m, pourvu qu'elles touchent B ; ces trois faces se coupent deux à deux suivant trois arêtes, lesquelles rencontrent de nouveau A en des points m_1, m_2, m_3, et le plan de ces trois points est nécessairement tangent à B.

6. Corollaire I. — *De même, si* m_1, m_2, m_3 *sont trois points quelconques de* A *situés dans un même plan tangent de* B, *les*

nouveaux plans tangents menés à B *par les trois droites* $m_1 m_2$, $m_1 m_3$, $m_2 m_3$ *se coupent en un point situé sur* A.

7. Corollaire II. — *Soit* m *un point d'une quadrique* A; *les arêtes d'un trièdre* quelconque *de sommet* m *coupent de nouveau* A *en* m_1, m_2, m_3 : *toute quadrique,* B, *tangente aux trois faces du trièdre et quadritangente à* A, *touche le plan des trois points* m_1, m_2, m_3.

8. Cela posé, pour démontrer la réciproque de notre théorème général, établissons un second lemme.

9. Lemme II. — *Soit toujours* m *un point de la quadrique* A; *désignons par* C *un cône quadrique quelconque de sommet* m: *je dis qu'il existe une quadrique,* B, *inscrite à* C *et quadritangente à* A.

En effet, σ étant la biquadratique (de genre zéro) commune à C et à A, on sait qu'il y a quatre génératrices de A (p_1, p_2, p_3, p_4) tangentes à σ, respectivement en des points α_1, α_2, α_3, α_4, lesquels sont situés dans un même plan Π_0 [1] : les quatre génératrices p_i forment un quadrilatère gauche. Soit θ la conique section de C par Π_0 : il existe une quadrique, B, passant par les quatre génératrices p_i et par un point, α, choisi arbitrairement sur θ; cette quadrique est quadritangente à A, puisqu'elle en contient quatre génératrices, je dis qu'elle est circonscrite à C. En effet, 1° elle contient la conique θ, puisqu'elle en contient cinq points, α_1, α_2, α_3, α_4 et α; 2° son intersection avec le cône C touche évidemment les génératrices p_1, p_2, p_3, p_4, aux points α_1, α_2, α_3, α_4, ce qui exige, puisqu'elle comprend déjà la conique θ, qu'elle se compose de cette conique comptée deux fois. C. Q. F. D.

10. Supposons maintenant qu'il existe une infinité *triple* de tétraèdres inscrits à A et circonscrits à une quadrique B′, ayant pour un de leurs sommets un point m de A. Je dis que B′ est quadritangente à A.

En effet, soit C le cône de sommet m circonscrit à B′; en vertu

[1] On vérifie ce résultat sans difficulté en partant de la représentation de la quadrique A sur un plan, à l'aide de projetantes issues de m.

de l'hypothèse, trois plans tangents quelconques de C déterminent un trièdre dont les arêtes percent de nouveau A en m_1, m_2, m_3, et le plan m_1, m_2, m_3, qui dépend évidemment de deux paramètres au moins, enveloppe la quadrique B'. D'un autre côté, en vertu du théorème direct et du lemme II, ce plan enveloppe une quadrique B inscrite au cône C et quadritangente à A; B' coïncide donc avec B, ce qui établit la proposition, et la réciproque cherchée.

11. Corollaire I. — *C étant un cône quadrique dont le sommet m est sur une quadrique* A, *il n'existe qu'une surface du second ordre quadritangente à* A *et inscrite à* C.

12. Corollaire II. — Soient A et D deux quadriques *quelconques.* Considérons les tétraèdres inscrits à A et circonscrits à D dont un sommet est le point *m* de A, et soit C le cône de sommet *m* circonscrit à D.

En vertu de ce qui précède, les faces des tétraèdres considérés qui sont opposées au sommet *m* touchent la quadrique B qui est inscrite à C et quadritangente à A; par hypothèse elles touchent aussi la quadrique D. Or les quadriques B et D sont inscrites toutes deux au cône C; leurs plans tangents communs forment donc deux séries : ceux de la première enveloppent le cône C et ceux de la seconde un autre cône Σ, dont je désigne le sommet par μ. En d'autres termes :

Les tétraèdres inscrits à une quadrique A, *circonscrits à une quadrique* D *prise au hasard, et dont un sommet est un point m de* A, *forment évidemment un système doublement infini; les faces opposées au sommet m sont en nombre simplement infini, et passent toutes par un point fixe* μ.

Réciproquement, tout plan passant par μ et tangent à D appartient, comme face, à une infinité simple des tétraèdres considérés.

13. Cherchons maintenant une extension analogue du théorème de Poncelet pour les tétraèdres inscrits à une quadrique et dont les faces touchent chacune deux autres quadriques : il nous sera plus commode d'étudier le problème réciproque, à savoir celui des tétraèdres inscrits à une biquadratique gauche et dont les faces

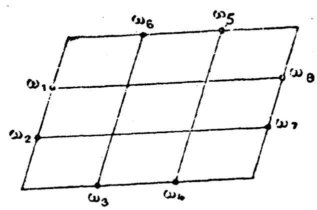
touchent une quadrique. *A priori,* il n'y a, en général, qu'un *nombre limité* de tels tétraèdres ; et, en aucun cas, il ne peut en exister une *triple* infinité. Le cas intéressant et donc celui où les tétraèdres considérés seraient en nombre doublement infini ; et voici, à ce sujet, le théorème fondamental que nous compléterons plus loin par une étude géométrique détaillée.

14. Théorème. — *Pour qu'il existe une infinité double de tétraèdres inscrits à une biquadratique gauche,* ω, *et circonscrits à une quadrique,* B, *il suffit et il faut que huit génératrices de la quadrique soient des cordes de la biquadratique.*

Démontrons d'abord que la condition est suffisante.

15. En vertu de l'hypothèse, les huit points $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_8$ où la biquadratique ω coupe B sont, deux à deux, sur huit génératrices de B, comme l'indique la figure schématique suivante (*fig.* 2).

Fig. 2.



Il en résulte que la quadrique A menée par ω et la corde $\omega_1\omega_2$ contiendra les cordes $\omega_3\omega_4$ et $\omega_5\omega_6$ qui s'appuient sur $\omega_1\omega_2$, et aussi la corde $\omega_7\omega_8$ qui s'appuie sur $\omega_3\omega_4$: cette quadrique A, contenant ainsi quatre génératrices de B, lui sera quadritangente.

De même la quadrique A', menée par ω et la corde $\omega_1\omega_8$, sera quadritangente à B, de sorte que la biquadratique ω sera l'intersection de deux quadriques, A et A', quadritangentes à B.

Cela posé, soit Π un plan tangent *quelconque* de B, coupant ω aux points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$: menons par les droites $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_3$, $\alpha_2\alpha_3$ les trois plans, autres que Π, qui touchent B : ces plans, en vertu d'un corollaire précédent (n° 6) se coupent à la fois sur A et sur A', c'est-à-dire sur ω. Désignons par α'_4 leur point d'intersection : le tétraèdre $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha'_4$ est inscrit à ω et circonscrit à B, et, comme le plan $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ est un plan tangent quelconque, Π, de B, on obtient ainsi une infinité *double* de pareils tétraèdres. C. Q. F. D.

16. Étudions de plus près ces tétraèdres. D'abord, en groupant trois à trois les périodes α_1, α_2, α_3, α_4, on obtient, par la méthode précédente, quatre nouveaux points, α'_1, α'_2, α'_3, α'_4, de la biquadratique ω, et les quatre tétraèdres $\alpha_i\alpha_j\alpha_k\alpha'_l$ (les indices i, j, k, l étant différents) sont inscrits à ω et circonscrits à B.

Dès lors les plans $\alpha_i\alpha_j\alpha_k$, $\alpha_i\alpha_j\alpha'_k$, $\alpha_i\alpha_j\alpha_l$, $\alpha_i\alpha_j\alpha'_l$, sont tangents à B : comme il ne passe que deux tels plans par la droite $\alpha_i\alpha_j$, et que l'un d'eux est, par hypothèse, le plan des quatre points α_i, α_j, α_k, α_l, on en conclut que les quatre points α_i, α_j, α'_k, α'_l sont dans un même plan, tangent à B.

Soient maintenant α_i et α'_i les arguments elliptiques, sur la biquadratique ω, des points α_i et α'_i, la représentation paramétrique étant supposée telle que les arguments de quatre points de ω, situés dans un même plan, aient une somme nulle. On aura entre les α_i et α'_i les sept relations

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k + \alpha_l = 0, \qquad \alpha_i + \alpha_j + \alpha'_k + \alpha'_l = 0,$$

i, j, k, l étant différents et désignant les chiffres 1, 2, 3, 4 dans un ordre quelconque. On en déduit sans difficulté les relations

$$\alpha'_i + \alpha'_j + \alpha'_k + \alpha'_l = 0, \qquad 2(\alpha'_i - \alpha_i) = 0,$$

et, par suite,

$$\alpha'_i = \alpha_i + \omega_\alpha,$$

ω_α étant une des trois demi-périodes des fonctions elliptiques introduites.

Donc le point α'_i est fixe lorsque le point α_i est donné, et le tétraèdre $\alpha_i\alpha'_j\alpha'_k\alpha'_l$ est aussi circonscrit à B. Ainsi :

Si une biquadratique ω *admet pour cordes huit génératrices d'une quadrique* B, *il existe une double infinité de tétraèdres inscrits à* ω *et circonscrits à* B. *Parmi ces tétraèdres, il en est une infinité simple qui ont pour sommet un point,* α, *de* ω, *et les faces opposées au sommet* α *passent toutes par un même point,* α', *de la biquadratique : les points* α *et* α' *sont conjugués dans une des trois involutions linéaires qui tranforment la biquadratique en elle-même.*

Les faces d'un quelconque des tétraèdres coupent respectivement la biquadratique en un nouveau point : les quatre points ainsi obtenus sont encore les sommets d'un second tétraèdre circonscrit à B; *et, réciproquement, le premier tétraèdre se déduit du second par la même construction.*

Les huit sommets et les huit faces des deux tétraèdres peuvent se grouper quatre à quatre de trois nouvelles manières pour former deux tétraèdres analogues.

17. Passons maintenant à la proposition réciproque, en supposant qu'il y ait une double infinité de tétraèdres inscrits à une biquadratique ω et circonscrits à une quadrique B, et cherchons la relation qui doit exister entre B et ω.

Tout d'abord, en vertu de l'hypothèse, un plan *quelconque* Π, tangent à B, sera face d'un ou de plusieurs des tétraèdres, et l'un de ceux-ci aura pour sommets trois des points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, communs à Π et à ω. Or je dis qu'aucune distinction n'est possible entre ces quatre points, c'est-à-dire que l'équation du quatrième ordre qui donne les points d'intersection de ω avec un plan *quelconque,* Π, tangent à la quadrique B, ne peut se décomposer *rationnellement* en deux équations d'ordre inférieur.

Car, si elle se décomposait en deux équations du second ordre, à chaque plan Π correspondraient *rationnellement* deux des points, α_1 et α_2, où Π coupe ω. A chacun des plans, Π, menés par α_1 tangentiellement à B correspondrait donc un seul point, α_2, de ω; or les plans Π considérés enveloppant un cône unicursal et ω étant de genre un, la correspondance n'est possible que si α_2 est fixe quand α_1 est donné. En ce cas, tout plan tangent à B mené par α_1 passerait par α_2, ce qui exige que B contienne la droite $\alpha_1\alpha_2$, et, comme α_1 est un point quelconque de ω, il faut que B passe par la biquadratique ω, cas à écarter comme sans intérêt.

Le même raisonnement prouverait que l'équation du quatrième ordre ne peut se décomposer rationnellement en deux équations, respectivement du premier et du troisième ordre.

Il résulte de là que, si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sont les quatre points communs à ω et à un plan quelconque, Π, tangent à B, il y aura *quatre* tétraèdres, inscrits à ω et circonscrits à B, ayant pour une de leurs faces le plan Π, et que leurs trois sommets dans cette face seront respectivement

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3;\quad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_4;\quad \alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_4;\quad \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4.$$

Soient alors α'_4, α'_3, α'_2, α'_1 les quatrièmes sommets respectifs de ces tétraèdres; on reconnaît, comme au n° 16, qu'on a entre les arguments elliptiques des points considérés les relations

$$\alpha'_i = \alpha_i + \omega_\alpha,$$

qui, jointes à

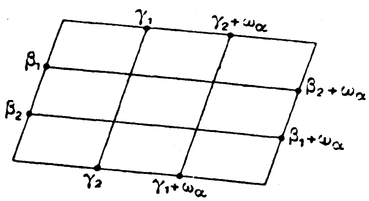
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0,$$

donnent toutes les propriétés géométriques trouvées plus haut (n° 16).

Cela posé, soit β_1 l'un des huit points communs à ω et à la quadrique B; désignons par d_1 et d'_1 les deux génératrices de B qui passent par β_1 : je dis que ce sont des cordes de ω.

En effet, un plan quelconque mené par d_1 est un plan, Π', tangent à B; et, si β_2, β_3, β_4 sont ses nouveaux points d'intersection avec ω, il existe, en vertu des propriétés générales des tétraèdres étudiés, un tétraèdre, inscrit à ω et circonscrit à B, admettant pour trois de ses sommets β_1, β_3 et β_4. Les deux faces, autres que Π',

Fig. 3.



qui passent par β_1, étant tangentes à B et distinctes de la face Π', passent nécessairement par la génératrice d'_1, qui dès lors contient le quatrième sommet, β'_2. La droite d'_1 est donc une corde de ω, et il en est de même de d_1 : de plus, en vertu de ce qui précède, si β_2 est le second point de rencontre de d_1 avec ω, le second point de rencontre de d'_1 avec ω sera le point β'_2, tel que

$$\beta'_2 = \beta_2 + \omega_\alpha.$$

Il résulte de là sans difficulté que les huit points de rencontre de ω avec B sont situés deux à deux sur huit génératrices de B comme l'indique le schéma ci-dessus (*fig.* 3).

Par suite, huit génératrices de B sont des cordes de ω, ou encore (n° 15) on peut faire passer par ω deux quadriques, A et A′, quadritangentes à B.

Ce résultat est précisément la proposition qu'il s'agissait d'établir sur la liaison entre ω et B. C. Q. F. D.

Transformons maintenant les propositions précédentes par polaires réciproques, nous obtenons ce qui suit :

18. Théorème. — *Soient* A, A′ *et* B *trois quadriques. Il n'y a en général qu'un nombre limité de tétraèdres inscrits à* B *par leurs sommets et dont les faces touchent à la fois* A *et* A′; *en aucun cas il ne peut exister un nombre triplement infini de tels tétraèdres.*

Pour que les tétraèdres considérés soient en nombre doublement infini, il faut et il suffit que, parmi les quadriques du faisceau tangentiel déterminé par A *et* A′, *il y en ait deux qui soient quadritangentes à* B.

En ce cas, chaque point, ϖ, *de* B *est le sommet de quatre tétraèdres de la famille; trois quelconques des quatre plans menés par* ϖ *tangentiellement à* A *et à* A′ *sont trois faces d'un même tétraèdre.*

Soit T *un quelconque des tétraèdres considérés; par chacun de ses sommets passe un nouveau plan touchant à la fois* A *et* A′ : *les quatre plans ainsi déterminés forment un tétraèdre,* T′, *de la famille. Le tétraèdre* T *se déduit de* T′ *par la même construction.*

Les huit faces et les huit sommets de T *et de* T′ *peuvent se grouper de trois autres manières pour former deux tétraèdres analogues.*

19. On peut compléter ces résultats par la proposition suivante, moins intéressante que la précédente, et qu'on établirait par des considérations de même nature.

Pour qu'il existe une série *simplement infinie* de tétraèdres inscrits à la quadrique B et circonscrits à la fois aux quadriques A et A′, il *suffit* que, parmi les quadriques du faisceau tangentiel déterminé par A et A′, il y en ait une qui soit quadritangente à B. Le lieu des sommets de ces tétraèdres est une biquadratique tracée sur B.

Il existe alors une seconde série de tétraèdres inscrits à B et circonscrits à A et à A′, dont les sommets décrivent, sur B, une seconde biquadratique.

Les faces d'un tétraèdre quelconque de la première série et celles d'un tétraèdre quelconque de la seconde forment un système de huit plans, tangents à une double infinité de quadriques.

Tout plan tangent à la fois à A et à A′ est face d'un tétraèdre de chaque série.