

# BULLETIN DE LA S. M. F.

L. LÉVY

**Sur les déplacements d'une figure invariable  
dans lesquels les différents points de la figure  
décrivent des courbes sphériques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 32 (1904), p. 203-211

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1904\\_\\_32\\_\\_203\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__203_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES DÉPLACEMENTS D'UNE FIGURE INVARIABLE DANS LESQUELS  
LES DIFFÉRENTS POINTS DE LA FIGURE DÉCRIVENT  
DES COURBES SPHÉRIQUES;**

Par M. LUCIEN LÉVY.

1. On doit à M. Darboux un beau théorème sur le mouvement d'une figure dont tous les points décrivent des lignes *planes* <sup>(1)</sup>. M. Mannheim a en outre démontré que *tous les points d'une droite décrivent des lignes SPHÉRIQUES dont les centres sont dans un même plan si quatre points de la droite jouissent de cette propriété. Le lieu des centres des sphères qui contiennent les lignes sphériques est une conique* (*Principes de Géométrie cinématique*, p. 180). Il en résulte immédiatement que, dans le cas général, si tous les points d'une droite décrivent des lignes sphériques, le lieu des centres des sphères est une cubique gauche, puisque ce lieu ne peut pas être coupé par un plan en quatre points sans en faire entièrement partie.

Duporcq (*Journal de mathématiques pures*, 1898) a donné un élégant théorème sur le mouvement d'une droite : *s'il existe sur une droite cinq points qui, pour cinq positions déterminées de la droite, soient situés sur cinq sphères, les cinq positions d'un sixième point quelconque de la droite seront sur une même sphère.*

---

(1) *Comptes rendus*, 1881. Voir aussi KÆNIGS, *Leçons de Cinématique*, Note III de M. Darboux, p. 353. M. Mannheim s'est attaché au mouvement inverse de celui dont il s'agit, *d'une figure dont les plans passent par des points fixes* et en a fait une étude élégante (*Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 389).

Enfin, M. Raoul Bricard (*Journal de mathématiques pures*, 1898) a déterminé tous les déplacements dans lesquels tous les points d'un plan décrivent des lignes sphériques dont les centres sont dans un même plan.

La présente Note a seulement pour objet de retrouver par le calcul quelques-uns des résultats précédents et d'étendre le procédé à quelques théorèmes que nous croyons nouveaux.

2. Désignons par  $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, \dots$  les coordonnées des points  $M_0, M_1, \dots$  de la figure mobile; par  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \dots$  celles des centres  $C_0, C_1, \dots$  des sphères sur lesquelles restent les points correspondants, par  $R_0, R_1, \dots$  les rayons de ces sphères. Enfin, lorsque les points  $M_0, M_1, \dots$  seront sur une même droite (D), nous désignerons par  $a, b, c$  les cosinus directeurs de cette droite, et par  $\rho_i$  la distance  $\overline{M_0 M_i}$ , de sorte qu'on aura

$$(1) \quad \begin{cases} \rho_0 = 0, \\ x_i = x_0 + a\rho_i, \\ y_i = y_0 + b\rho_i, \\ z_i = z_0 + c\rho_i, \end{cases}$$

avec  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

On a aussi, dans tous les cas,

$$(2) \quad (x_0 - \alpha_0)^2 + (y_0 - \beta_0)^2 + (z_0 - \gamma_0)^2 = R_0^2,$$

$$(3) \quad (x_i - \alpha_i)^2 + (y_i - \beta_i)^2 + (z_i - \gamma_i)^2 = R_i^2,$$

et, dans le cas où tous les points  $M_i$  sont en ligne droite,

$$(4) \quad (x_0 + a\rho_i - \alpha_i)^2 + (y_0 + b\rho_i - \beta_i)^2 + (z_0 + c\rho_i - \gamma_i)^2 = R_i^2$$

Soit O l'origine des coordonnées : posons

$$(5) \quad \overline{Oc_i} = d_i^2 = \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2.$$

L'équation (4) devient

$$(6) \quad \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \rho_i^2 + d_i^2 \\ - 2[\alpha_i(x_0 + a\rho_i) + \beta_i(y_0 + b\rho_i) + \gamma_i(z_0 + c\rho_i)] \\ + 2\rho_i(ax_0 + by_0 + cz_0) = R_i^2. \end{cases}$$

En retranchant l'équation (2) de l'équation (6), on obtient la nouvelle égalité

$$(7) \quad \begin{cases} 2(\alpha\rho_i + \alpha_0 - \alpha_i)x_0 + 2(b\rho_i + \beta_0 - \beta_i)y_0 + 2(c\rho_i + \gamma_0 - \gamma_i)z_0 \\ - 2(\alpha\alpha_i + b\beta_i + c\gamma_i)\rho_i + \rho_i^2 + d_i^2 - d_0^2 - R_i^2 + R_0^2 = 0, \end{cases}$$

que nous écrirons

$$(8) \quad \begin{cases} 2\alpha\rho_i(x_0 - \alpha_i) + 2b\rho_i(y_0 - \beta_i) + 2c\rho_i(z_0 - \gamma_i) \\ = l_i^2 + 2[(\alpha_i - \alpha_0)x_0 + (\beta_i - \beta_0)y_0 + (\gamma_i - \gamma_0)z_0], \end{cases}$$

en posant, pour abrégier,

$$(9) \quad l_i^2 = R_i^2 - R_0^2 - \rho_i^2 - d_i^2 + d_0^2.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir un certain nombre de théorèmes.

3. THÉORÈME DE M. MANNHEIM. — *Supposons que quatre points de la droite (D), ceux qui correspondent à  $i = 0, 1, 2, 3$ , soient sur des sphères dont les centres sont dans un même plan, que nous prendrons pour plan des  $yz$ . On aura*

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0.$$

On peut même, pour simplifier l'écriture, supposer  $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0$ .

L'égalité (8) est une identité pour  $i = 0$ . Nous déduisons donc de (8) trois égalités qui sont vérifiées, par hypothèse :

$$(10) \quad \begin{cases} 2\alpha\rho_1(x_0 - \alpha_1) + 2b\rho_1(y_0 - \beta_1) + 2c\rho_1z_0 = l_1^2 + 2(\alpha_1x_0 + \beta_1y_0), \\ 2\alpha\rho_2(x_0 - \alpha_2) + \dots, \\ 2\alpha\rho_3(x_0 - \alpha_3) + \dots \end{cases}$$

Considérons maintenant un cinquième point  $M_4$  de la droite,  $i = 4$ . On tire des formules (1)

$$(11) \quad \begin{cases} x_0 = x_4 - a\rho_4, \\ y_0 = y_4 - b\rho_4, \\ z_0 = z_4 - c\rho_4 \end{cases}$$

et aussi

$$x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \rho_4^2 + 2\rho_4(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

ou, en tenant compte de l'équation (2),

$$(12) \quad x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = R_0^2 + \rho_i^2 + 2\rho_i(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

Portons les valeurs de  $x_0, y_0, z_0$  tirées de (11) dans les seconds membres de (10); ces égalités peuvent s'écrire

$$2\rho_1(ax_0 + by_0 + cz_0) - 2\alpha_1\rho_1 a - 2\beta_1\rho_1 b = l_1^2 + 2\alpha_1 x_i + 2\beta_1 y_i - 2\rho_i(\alpha x_1 + b\beta_1),$$

.....

ou

$$(13) \quad \begin{cases} 2\rho_1(ax_0 + by_0 + cz_0) + 2(\rho_i - \rho_1)\alpha_1 a + 2(\rho_i - \rho_1)\beta_1 b \\ = l_1^2 + 2\alpha_1 x_i + 2\beta_1 y_i, \\ 2\rho_2(ax_0 + by_0 + cz_0) + \dots, \\ 2\rho_3(\dots\dots\dots) + \dots \end{cases}$$

En éliminant  $a, b$  et  $ax_0 + by_0 + cz_0$  entre les équations (12) et (13), nous obtenons le lieu du point  $M_i$

$$0 = \begin{vmatrix} x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - R_0^2 - \rho_i^2 & 2\rho_i & 0 & 0 \\ l_1^2 + 2\alpha_1 x_i + 2\beta_1 y_i & 2\rho_1 & 2(\rho_i - \rho_1)\alpha_1 & 2(\rho_i - \rho_1)\beta_1 \\ l_2^2 + 2\alpha_2 x_i + 2\beta_2 y_i & 2\rho_2 & 2(\rho_i - \rho_2)\alpha_2 & 2(\rho_i - \rho_2)\beta_2 \\ l_3^2 + 2\alpha_3 x_i + 2\beta_3 y_i & 2\rho_3 & 2(\rho_i - \rho_3)\alpha_3 & 2(\rho_i - \rho_3)\beta_3 \end{vmatrix}$$

qui peut s'écrire, en développant suivant les éléments de la première colonne,

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - 2\xi x_i - 2\eta y_i + \lambda = 0.$$

Le lieu est donc une sphère ayant son centre  $C_i$  dans le plan des  $xy$ .

On calculerait aisément  $\xi, \eta$  d'où résulterait, par l'élimination de  $\rho_i$ , la conique lieu du point  $C_i$ . Nous ne donnerons pas ce calcul.

4. AUTRE THÉORÈME. — *Si cinq points d'une droite décrivent des lignes sphériques, tous les points de la droite décrivent des lignes sphériques.*

Le mode de démonstration est tout à fait le même. Nous pouvons encore supposer  $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$ ; mais les quatre centres  $C_1, C_2, C_3, C_4$  sont quelconques.

L'équation (8) s'écrit ici

$$(14) \quad \begin{cases} 2\rho_i[(x_0 - \alpha_i)a + (y_0 - \beta_i)b + (z_0 - \gamma_i)c] \\ = l_i^2 + 2(\alpha_i x_0 + \beta_i y_0 + \gamma_i z_0) \end{cases}$$

et cette équation en vaut quatre en faisant  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Considérons maintenant un sixième point  $M_5$  ( $i = 5$ ); des formules (1), on tire

$$(15) \quad \begin{cases} x_0 = x_5 - a\rho_5, \\ y_0 = y_5 - b\rho_5, \\ z_0 = z_5 - c\rho_5 \end{cases}$$

et aussi

$$(16) \quad x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 = R_0^2 + \rho_5^2 + 2\rho_5(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

Portons les valeurs de  $x_0, y_0, z_0$  tirées de (15) dans les seconds membres des quatre équations (14); on obtient quatre nouvelles équations qui peuvent s'écrire

$$(17) \quad \begin{cases} 2\alpha_i(\rho_5 - \rho_i)a + 2\beta_i(\rho_5 - \rho_i)b + 2\gamma_i(\rho_5 - \rho_i)c \\ = l_i^2 + 2(\alpha_i x_5 + \beta_i y_5 + \gamma_i z_5) + 2\rho_i(ax_0 + by_0 + cz_0). \end{cases}$$

En éliminant  $a, b, c$  et  $ax_0 + by_0 + cz_0$  entre ces quatre équations et l'équation (16), on trouve enfin

$$\begin{vmatrix} x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 - R_0^2 - \rho_5^2 & 2\rho_5 & 0 & 0 & 0 \\ l_1^2 + 2(\alpha_1 x_5 + \beta_1 y_5 + \gamma_1 z_5) & 2\rho_1 & 2\alpha_1(\rho_5 - \rho_1) & 2\beta_1(\rho_5 - \rho_1) & 2\gamma_1(\rho_5 - \rho_1) \\ l_2^2 + \dots & & & & \\ l_3^2 + \dots & & & & \\ l_4^2 + \dots & & & & \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation développée et ordonnée s'écrit

$$x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 - 2\xi x_5 - 2\eta y_5 - 2\zeta z_5 + \lambda = 0,$$

ce qui montre que le lieu du point quelconque  $M$ , est sur une sphère, et le théorème est démontré.

Le calcul des coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  du centre de cette sphère se fait sans difficulté; il est seulement un peu long et nous nous bornerons à transcrire le résultat. Il est de la forme

$$(18) \quad \begin{cases} \xi = \frac{(\mu_1 \rho_5^2 + \nu_1 \rho_5 + \varpi_1) \rho_5}{\lambda \rho_5^2 + \mu \rho_5^2 + \nu \rho_5 + \varpi}, \\ \eta = \frac{(\mu_2 \rho_5^2 + \nu_2 \rho_5 + \varpi_2) \rho_5}{\lambda \rho_5^2 + \mu \rho_5^2 + \nu \rho_5 + \varpi}, \\ \zeta = \frac{(\mu_3 \rho_5^2 + \nu_3 \rho_5 + \varpi_3) \rho_5}{\lambda \rho_5^2 + \mu \rho_5^2 + \nu \rho_5 + \varpi}. \end{cases}$$

Ces équations définissent une cubique gauche, comme c'était prévu.

5. *Corollaire.* — En éliminant  $a, b, c$  entre les quatre équations (14), on obtient une équation du second degré en  $x_0, y_0, z_0$ . Cette équation jointe à

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R_0^2$$

montre que le point  $M_0$  et, puisque ce point n'a rien de spécial, tous les points de la droite (D) décrivent des biquadratiques sphériques (Duporcq).

6. La même méthode fournit des théorèmes sur le nombre de points qui suffisent à assurer le mouvement sur des lignes sphériques de tous les points d'une figure quelconque, plane ou non. En voici quelques-uns.

**THÉORÈME.** — *Si treize points arbitraires d'un solide décrivent des lignes sphériques, il en sera de même de tous les points du solide.*

Un point mobile quelconque  $M_i$  peut être représenté par les formules suivantes :

$$(19) \quad \begin{cases} x_i = x_0 + a\rho_i + a'\rho'_i + a''\rho''_i, \\ y_i = y_0 + b\rho_i + b'\rho'_i + b''\rho''_i, \\ z_i = z_0 + c\rho_i + c'\rho'_i + c''\rho''_i, \end{cases}$$

dans lesquelles  $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$  sont les cosinus directeurs des arêtes d'un trièdre trirectangle mobile. L'interprétation géométrique de ces formules est évidente. Par le point  $M_0$  menons trois droites dont les cosinus directeurs soient respectivement  $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$  et prenons-les pour nouveaux axes de coordonnées. Les constantes  $\rho_i, \rho'_i, \rho''_i$  représenteront les coordonnées du point mobile  $M_i$  rapportées à ces axes mobiles. Les formules (19) sont des formules de transformation de coordonnées.

Convenons enfin de désigner par le signe S la somme de trois termes déduits de l'un d'eux par la substitution des lettres  $x, y, z$  à  $x$ , ou  $a, b, c$  à  $a$  ou  $\alpha, \beta, \gamma$  à  $\alpha, \dots$ . En élevant les équations

lions (19) au carré, et ajoutant, on obtient l'identité

$$(20) \quad Sx_i^2 = Sx_0^2 + \rho_i^2 + \rho_i'^2 + \rho_i''^2 + 2S(\alpha\rho_i + \alpha'\rho_i' + \alpha''\rho_i'')x_0.$$

Si le point  $M_0$  reste sur une sphère ayant son centre à l'origine, on aura

$$Sx_0^2 = R_0^2,$$

d'où

$$(21) \quad Sx_i^2 = R_0^2 + \rho_i^2 + \rho_i'^2 + \rho_i''^2 + 2S(\alpha\rho_i + \alpha'\rho_i' + \alpha''\rho_i'')x_0$$

et, si le point  $M_i$  est aussi sur une sphère, on aura nécessairement

$$(22) \quad S(\alpha\rho_i + \alpha'\rho_i' + \alpha''\rho_i'')x_0 = \alpha_i x_i + \beta_i y_i + \gamma_i z_i + p_i,$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, p_i$  étant des constantes dont les trois premières sont les coordonnées du centre  $c_i$  de la sphère sur laquelle reste le point  $M_i$ . Remplaçons dans (22)  $x_i, y_i, z_i$  par leurs valeurs tirées de (19) et ordonnons par rapport aux constantes  $\rho_i, \rho_i', \rho_i''$ ; il vient

$$(23) \quad \begin{cases} \rho_i S(\alpha x_0) + \rho_i' S(\alpha' x_0) + \rho_i'' S(\alpha'' x_0) \\ = S(\alpha_i x_0) + \rho_i S(\alpha \alpha_i) + \rho_i' S(\alpha' \alpha_i) + \rho_i'' S(\alpha'' \alpha_i) + p_i. \end{cases}$$

Cela posé, considérons un point quelconque  $M$  ayant pour coordonnées  $x, y, z$  par rapport aux axes fixes et  $\rho, \rho', \rho''$  par rapport au trièdre mobile, de sorte que

$$(24) \quad \begin{cases} x = x_0 + a\rho + a'\rho' + a''\rho'', \\ y = y_0 + b\rho + b'\rho' + b''\rho'', \\ z = z_0 + c\rho + c'\rho' + c''\rho''. \end{cases}$$

et

$$(25) \quad Sx^2 = R^2 + \rho^2 + \rho'^2 + \rho''^2 + 2\rho S(\alpha x_0) + 2\rho' S(\alpha' x_0) + 2\rho'' S(\alpha'' x_0).$$

Entre les égalités (24), (25) et les douze qu'on déduira de (23) en donnant à  $i$  douze valeurs distinctes, on pourra éliminer les quinze inconnues  $x_0, y_0, z_0, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', S(\alpha x_0), S(\alpha' x_0), S(\alpha'' x_0)$  qui y figurent au premier degré. Il en résultera une relation de la forme

$$(26) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2\xi x - 2\eta y - 2\zeta z + \lambda = 0,$$

qui exprime que le point  $M$  reste sur une sphère si  $M_0$  et les douze points  $M_i$  restent sur des sphères.



7. Supposons  $\rho_i''$  et  $\rho''$  nuls; tout ce qui renferme les lettres  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$  et  $S(a''x_0)$  disparaît et il suffit de donner à  $i$  dans les formules (23) huit valeurs différentes pour avoir ce nouveau théorème : *Si neuf points d'un plan décrivent des lignes sphériques, il en est de même de tous les points de ce plan.*

8. Enfin si l'on supposait de plus  $\rho_i'$  et  $\rho'$  nuls, on retomberait sur le théorème du n° 3.

9. Les raisonnements précédents ne prouvent pas qu'on ne puisse pas se contenter d'assujettir moins de neuf points d'un plan ou moins de treize points d'un solide à décrire des lignes sphériques, tous les points du plan ou du solide décrivant en conséquence des lignes sphériques. Soit, en effet,  $M_0\rho\rho'\rho''$  le trièdre mobile. Dès qu'on aura assujetti cinq points de  $M_0\rho$  et un point de  $M_0\rho'$  à décrire des lignes sphériques le mouvement sera entièrement déterminé; tous les autres points du système décriront des courbes déterminées et l'on n'a aucune indication sur le nombre de ces courbes qu'il faut assujettir à être sphériques pour entraîner la sphéricité des autres. Il y a cependant des présumptions : si  $M_0\rho'$  était indépendante de  $M_0\rho$ , il faudrait bien assujettir cinq points de  $M_0\rho$  à être sur des sphères, ce qui, avec les cinq points de  $M_0\rho$  parmi lesquels on peut compter  $M_0$ , fait bien neuf points. On ferait le même raisonnement pour les points de  $M_0\rho''$ , ce qui semble donner treize points pour la possibilité d'un mouvement satisfaisant d'une figure solide.

10. D'ailleurs la possibilité même du mouvement reste à établir; c'est bien ce qu'a fait M. Bricard dans le *Mémoire* dont nous avons déjà parlé en montrant que si les centres des sphères sont assujettis à être dans deux plans rectangulaires, tandis que les points qui décrivent les lignes sphériques sont eux-mêmes dans deux plans rectangulaires, aucun point attaché aux deux plans mobiles ne peut décrire de ligne sphérique en dehors de ceux situés dans ces plans.

11. *Cas particuliers.* — Le nombre des conditions diminue si les centres ont certaines positions particulières. Sans parler du cas évident où toutes les sphères sont concentriques, nous citerons

par exemple le cas signalé par M. Mannheim des sphères ayant leurs centres dans un même plan et où il suffit qu'une droite ait quatre points satisfaisants pour que tous ses points décrivent des lignes sphériques.

Par analogie avec le raisonnement du n° 9, on peut prévoir que *tous les points d'un plan resteront sur des sphères ayant leurs centres dans un même plan dès que sept points du plan mobile jouissent de cette propriété.* C'est ce qu'il est facile de vérifier.

Prenons en effet pour plan fixe le plan des  $xy$ ; dans les équations des pages 9 et 10, il faudra faire  $\gamma_i = 0$ , et les seconds membres des équations (23) ne contiendront plus comme inconnues que  $x_0, y_0, a, b, a', b'$ , parce que  $\rho_i'' = 0$ . Comme de plus  $\rho'' = 0$ , il n'y aura en dehors des inconnues précédentes que  $S(ax_0)$ ,  $S(a'x_0)$  et enfin  $z_0$  qui ne figure que dans la troisième équation (24), et dont par conséquent il n'y a pas à tenir compte. Pour pouvoir éliminer les huit inconnues, il n'y a donc à joindre à l'équation (25) et aux deux premières équations (24) que six équations (23). En d'autres termes, en comptant le point  $M_0$ , il suffit de supposer que sept points du plan mobile décrivent des lignes sphériques. La non-utilisation de la troisième équation (24) prouve que, dans l'équation (26), on aura

$$\zeta = 0,$$

c'est-à-dire que les centres des sphères sur lesquelles restent les points du plan mobile sont bien dans le plan fixe.

---