BULLETIN DE LA S. M. F.

POTRON

Les Gp^m (p premier) dont tous les Gp^{m-2} sont abéliens

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 300-314
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__300_1>

LES G_{p^m} (p PREMIER) DONT TOUS LES $G_{p^{m-1}}$ SONT ABÉLIENS;

Par M. Potron.

1. Ayant rencontré dans ma Thèse de doctorat quelques types de g_{p^m} (p premier) caractérisés par cette propriété, j'ai été amené (¹) à chercher tous les g_{p^m} (p premier) qui la possèdent; je me suis toutefois restreint aux groupes métabéliens. De nouvelles recherches m'ont permis de m'affranchir de cette restriction et d'arriver à la détermination complète des g_{p^m} (p premier) caractérisés par la propriété énoncée. Je les expose dans le présent travail, me bornant à rappeler (4) (5) les résultats partiels obtenus dans ma Thèse, afin de les relier (12) au résultat général.

2. Outre les théorèmes de la théorie des groupes employés et cités dans ma Thèse (²), je me servirai principalement des suivants :

I (³). Si C désigne le commutant et P le p. p. c. m. des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des éléments de G, *le groupe* CP *est p. g. c. d. des* $g_{p^{m-1}}$ *de* G. $G \mid CP$ est d'ailleurs abélien principal.

II (⁴). Soit a_{ij_i} $(i = 1, \ldots, \nu; j = 1, \ldots, n_i)$ une base d'un g_{p^m} abélien G; *pour qu'un système d'éléments* $b_{kl_k} = \Pi_{ij_i} a_{ij_i}^{x_{ij_i kl_k}}$ *forme*

(¹) *Thèse*, nᵒˢ 17-24, p. 30-69, 159, 160, 162. (Paris, Gauthier-Villars, 1904.) Pour la terminologie et les notations, voir ma *Thèse* et de Séguier, *Éléments de la Théorie des groupes abstraits.*

(²) *Thèse*, nᵒ 2.

(³) Bagnerà, *R. A. L. R.*, 1898, *A. D. M.* (IIIᵉ série), t. II, p. 264.

(⁴) *Thèse*, nᵒ 14, p. 24, 25.

un système de générateurs de G, *il faut et suffit que la matrice des* x *soit* mod p *de rang* Σn_i.

III (1). *Pour que tout diviseur d'un* g_{p^m} *non abélien* G *soit abélien, il faut et suffit que* $G \mid A$ *soit principal d'ordre* p^2 *et que, en désignant par* $\{ Ad, Ae \}$ *une base de* $G \mid A$, *c'est-à-dire par* d, e *deux éléments non permutables de* G, *on ait* $A = \{ d^p, e^p, d^{-1}e^{-1}de \}$. En appliquant le théorème II, la deuxième condition s'exprime ainsi : *d et e désignant deux éléments non permutables de* G, *la matrice des exposants des générateurs d'une base de* A *dans les expressions* d^p, e^p, $d^{-1}e^{-1}de$ *est* mod p *de rang égal au nombre des générateurs d'une base de* A. On a d'ailleurs évidemment $G = \{ d, e \}$.

3. Parmi les g_{p^m} dont tous les $g_{p^{m-1}}$ sont abéliens figurent évidemment les g_{p^4} et les g_{p^m} dont tous les diviseurs sont abéliens. Ces groupes ayant été déterminés (2), je les laisserai ici de côté et *je désignerai toujours par* G *un* g_{p^m} (p *premier*, $m > 4$) *dont tout* $g_{p^{m-1}}$ *est abélien et dont un* $g_{p^{m-1}}$ *au moins n'est pas abélien.* Soit alors Az_j ($j = 1, \ldots, \mu$) un système de générateurs indépendants de $G \mid A$, je distinguerai les deux cas : $\mu > 2$, $\mu = 2$.

4. *Soit d'abord* $\mu > 2$. Quel que soit j, les

$$G_{jk} = \{ A, z_j, z_k \} \qquad (k = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, \mu)$$

sont tous $<$ G et ne peuvent être tous abéliens sans quoi z_j serait dans A. Soit G′ un G_{jk} non abélien ; G′ est d'indice p dans G et a tous ses diviseurs abéliens, G′ peut donc (n° 2, théorème III) être engendré par deux générateurs d, e ; son central A′ est

$$\{ d^p, e^p, d^{-1}e^{-1}de \}$$

(on a d'ailleurs $A' \geqq A$), et G s'obtient en adjoignant à G′ un élément f tel que f^p soit dans G′. On a donc

$$G' = \{ d, e \} = \{ A, d, e \}, \qquad G = \{ d, e, f \} = \{ A, d, e, f \}.$$

En considérant les trois groupes $\{ A, d, e \}$, $\{ A, d, f \}$, $\{ A, e, f \}$

(1) *Thèse*, n° 13, p. 24.
(2) *Thèse*, n°s 13-16, p. 23-30.

dont tous les diviseurs sont abéliens, on voit que d^p, e^p, f^p sont permutables à d, e, f, donc dans A; f^p qui appartient à G' appartient donc à A'; or A' d'indice p^2 dans G' est d'ordre p^{m-3}; f étant hors de G' et par suite de A', $\{A', f\}$ est d'ordre p^{m-2} donc abélien, donc $A' \leqq A$. *On a donc* $A' = A$ *et* $\{G, A\} = p^3$.

Les groupes $\{A, d, e\}$ et $\{A, d, f\}$ sont abéliens ou métabéliens; dans ce dernier cas leurs centraux respectifs contenant A et étant d'ordre p^{m-3} sont égaux à A. Les trois groupes $\{A, d, e\}$, $\{A, d, f\}$, $\{A, e, f\}$ étant ou abéliens ou métabéliens de central A, G *est métabélien. L'hypothèse* $\mu > 2$ *ne fournit donc que des types déterminés dans ma Thèse* (¹).

5. *Soit désormais* $\mu = 2$, $G = \{A, e, f\}$; le groupe non abélien $\{e, f\}$ est dans G d'indice $\leqq p$. Laissant de côté le cas $\{e, f\} < G$ traité dans ma Thèse (²), *je supposerai* $\{e, f\} = G$, d'où $CP = \{C, e^p, f^p\}$, donc $(G, CP) \leqq p^2$; comme d'autre part il faut $(G, CP) > p$ sans quoi G serait cyclique (³), *on a* $(G, CP) = p^2$ *et* CP *est abélien*. Soit alors $e^{-1}f^{-1}ef = c$; si A contient c, le commutant est $\{c\}$ et G est métabélien; ce cas étant traité dans ma Thèse (⁴), *je supposerai que* A *ne contient pas* c et je distinguerai deux cas suivant que le commutant C est cyclique ou non.

6. *Supposons* C *cyclique* $= \{d\}$; soit

$$f^{-1}ef = ed^{\delta} \quad (d^{\delta} \text{ hors de A}), \qquad e^{-1}de = d^{\alpha}, \qquad f^{-1}df = d^{\beta};$$

on en tire

$$e^{-y}d^x e^y = d^{x\alpha^y}, \qquad f^{-z}d^x f^z = d^{x\beta^z}, \qquad f^{-z}e^y f^z = e^y d^{\delta\frac{(\alpha^y-1)(\beta^z-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}}$$

Comme CP est abélien, il faut que d soit permutable à e^p, f^p; donc

---

(¹) Ces types sont de figure (s 1) (111) ou (s 11) (111). Leurs équations seront données au n° 12.

(²) *Thèse*, n° 17, p. 30-31. Cette hypothèse conduit à des produits directs et à un type de figure (rs2) (11) dont les équations seront données au n° 12.

(³) Burnside, *Theory of groups*, n°ˢ 62, 63; De Séguier, *Éléments de la théorie des groupes abstraits*, n° 137, p. 115. Le théorème complet est : *un* g_{p^m} G *ayant un seul* g_{p^s} *est cyclique, sauf si l'on a à la fois* $p = 2$, $s = 1$, $m \geqq 3$, *auquel cas* G *est cyclique ou dicyclique*. L'exception ne peut se présenter ici où $s = m - 1 > 3$.

(⁴) *Thèse*, n° 17, p. 32. Ces types sont de figure (rs) (22). Leurs équations seront données au n° 12.

que $d^{\alpha^p} = d^{\beta^p} = d$. Comme les groupes $\{CP, e\} = \{d, e, f^p\}$ et $\{CP, f\} = \{d, e^p, f\}$ ont tous leurs diviseurs abéliens, il faut que d^p (et non d^δ), e^{p^2}, f^{p^2} soient permutables à e, f; donc que

$$d^{p\alpha} = d^{p\beta} = d, \qquad d^{\delta\frac{\alpha^{p^2}-1}{\alpha-1}} = d^{\delta\frac{\beta^{p^2}-1}{\beta-1}} = 1, \qquad \delta \not\equiv 0,$$

en sorte que l'on peut supposer $\delta = 1$. En désignant par p^γ l'ordre de d il faut donc

$$\alpha \equiv \beta \equiv 1 \bmod p^{\gamma-1}, \qquad \alpha^p \equiv \beta^p \equiv 1 \bmod p^\gamma, \qquad \frac{\alpha^{p^2}-1}{\alpha-1} \equiv \frac{\beta^{p^2}-1}{\beta-1} \equiv 0 \bmod p^\gamma.$$

Il faut donc d'abord $\gamma > 1$, car, en supposant $\gamma = 1$, les conditions $\alpha^p \equiv \beta^p \equiv 1$ exigeraient $\alpha \equiv \beta \equiv 1$ et d serait normal contrairement à l'hypothèse. Posons alors

$$\alpha = 1 + hp^{\gamma-1}, \qquad \beta = 1 + kp^{\gamma-1}, \qquad h \text{ ou } k \not\equiv 0;$$

on en tire (¹) (sauf si $p^{\gamma-1} = 2$, auquel cas $\gamma = 2$)

$$\alpha^{p^2} = 1 + h'p^{\gamma+1}, \qquad \beta^{p^2} = 1 + k'p^{\gamma+1}, \qquad h' \text{ ou } k' \not\equiv 0;$$

les conditions $\frac{\alpha^{p^2}-1}{\alpha-1} \equiv \frac{\beta^{p^2}-1}{\beta-1} \equiv 0 \bmod p^\gamma$ exigent donc $\gamma \leqq 2$. On a donc toujours $\gamma = 2$ et *d est d'ordre p^2.*

Un élément quelconque de G étant de la forme $f^z e^y d^x$ est dans A toujours et seulement si

$$(\alpha - 1)x - \frac{\beta^z - 1}{\beta - 1} \equiv (\beta - 1)y + \frac{\alpha^y - 1}{\alpha - 1} \equiv 0 \bmod p^2,$$

d'où

$$\frac{\alpha^y - 1}{\alpha - 1} \equiv \frac{\beta^z - 1}{\beta - 1} \equiv 0,$$

et par suite $y \equiv z \equiv 0$; tout élément de A est donc de la forme $f^{pz} e^{py} d^x$, donc A *divise* CP. D'ailleurs le p. p. c. m. des commu-

---

(¹) Si $g^\gamma = 1 + hp^\rho$ (p premier ne divisant pas h, $\rho \geqq 1$), on aura

$$g^{\gamma x p^s} = 1 + p^{s+\rho+\eta}(hx + kp)$$

(x premier à p, $\eta = 0$ sauf si l'on a à la fois $p = 2$, $\rho = 1$, $s \geqq 1$ auquel cas η est l'exposant de la plus haute puissance de 2 divisant $h+1$). [De Séguier, *Éléments*, n° 25, p. 28, note (²).]

tateurs de e^p, f^p, d avec e, f divise $\{ d^p \}$ et par suite A; CP | A divise donc le central de G | A; comme CP | A est d'indice p^2 dans le groupe non abélien G | A, CP | A est exactement le central de G | A et CP *est le deuxième central de* G.

7. Cherchons à déterminer G | A. *Soit d'abord* $p > 2$. On a toujours $\frac{(\alpha^p - 1)(\beta^p - 1)}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \not\equiv 0 \bmod p^2$, donc e^p et f^p ne sont pas normaux; ils sont d'ailleurs indépendants mod A, car, si

$$f^p \equiv e^p \bmod A,$$

f^p permutable à e et f serait normal; ainsi A est d'indice p^2 dans $\{ A, e^p, f^p \}$; je dis que A est aussi d'indice p^2 dans

$$CP = \{ A, e^p, f^p, d \},$$

c'est-à-dire que d est dans $\{ A, e^p, f^p \}$. Dans l'hypothèse contraire en effet A est d'indice p^5 dans G, on a mod A

$$c_1^p \equiv c_2^p \equiv d^p \equiv 1, \qquad e^p \equiv c_1, \qquad f^p \equiv c_2,$$
$$d^{-1} c_1 d \equiv e^{-1} c_1 e \equiv f^{-1} c_1 f \equiv c_1, \qquad d^{-1} c_2 d \equiv e^{-1} c_2 e \equiv f^{-1} c_2 f \equiv c_2,$$
$$e^{-1} d e \equiv f^{-1} d f \equiv d, \qquad f^{-1} e f \equiv e d;$$

et l'on a dans G, en tenant compte de toutes les conditions et hypothèses,

$$a^p = 1, \qquad d^p = a, \qquad e^p = c_1, \qquad f^p = c_2,$$
$$d^{-1} c_1 d = e^{-1} c_1 e = c_1, \qquad f^{-1} c_1 f = c_1 a,$$
$$d^{-1} c_2 d = c_2, \qquad e^{-1} c_2 e = c_2 a^{-1}, \qquad f^{-1} c_2 f = c_2,$$
$$e^{-1} d e = d a^{\lambda}, \qquad f^{-1} d f = d a^{\lambda'}, \qquad f^{-1} e f = e d, \qquad (\lambda \text{ ou } \lambda' \not\equiv 0).$$

Tout élément de G est donc mod A de la forme $f^v e^u d^z c_2^y c_1^x$; A étant d'indice p^5 dans G il faut que l'égalité $f^v e^u d^z c_2^y c_1^x \equiv 1 \bmod A$ entraîne $x \equiv y \equiv z \equiv u \equiv v \equiv 0$. Or cette condition n'est pas remplie, car $d c_2^{\lambda} c_1^{-\lambda'}$ est normal. Ainsi G | A *est de figure* (11)(11); comme e^p et f^p sont indépendants mod A, un seul des types d'ailleurs connus [1] des g_{p^4} convient, et *les équations de* G | A *peuvent s'écrire*

$$\left.\begin{array}{l} c^p \equiv d^p \equiv 1, \qquad e^p \equiv c, \qquad f^p \equiv d \\ d^{-1} c d \equiv e^{-1} c e \equiv f^{-1} c f \equiv c, \quad e^{-1} d e \equiv f^{-1} d f \equiv d, \quad f^{-1} e f \equiv e d \end{array}\right\} \bmod A.$$

---

(1) De Séguier, *Éléments*, n° 148, p. 130.

Soit maintenant $p = 2$. On a

$$f^{-1}e^2f = e^2d^{\alpha+1}, \qquad f^{-2}ef^2 = ed^{\beta+1}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 3).$$

On ne peut avoir $\alpha = \beta = 1$, car d serait normal. Si l'on a $\alpha = 1$, $\beta = 3$, f^2 est normal et $\mathrm{CP} = \{A, e^2, d\}$. Le $g_{2^{m-1}}$

$$\{\mathrm{CP}, f\} = \{e^2, f, d\}$$

ayant tous ses diviseurs abéliens, on a $\{e^2, f, d\} = \{f, d\}$, donc e^2 est de la forme $f^z d^x$; la condition de permutabilité $e^{-1}e^2e = e^2$ exige $z \equiv 0$, et la condition $f^{-1}e^2f = e^2d^2$ exige $x \equiv 1$; e^2 est donc dans $\{A, d\}$ et A est d'indice 2 dans $\mathrm{CP} = \{A, d\}$. $G \mid A$ *est donc de figure* (1) (11) *et a des équations* de la forme

$$d^2 \equiv 1, \quad e^2 \equiv d^\delta, \quad f^2 \equiv 1, \quad e^{-1}de \equiv f^{-1}df \equiv d, \quad f^{-1}ef \equiv ed, \quad \bmod A,$$

que l'on peut toujours ramener à la forme (obtenue dans l'hypothèse $\alpha = \beta = 3$)

$$d^2 \equiv e^2 \equiv f^2 \equiv 1, \qquad e^{-1}de \equiv f^{-1}df \equiv d, \qquad f^{-1}ef \equiv ed.$$

8. Achevons de déterminer G. *Soit d'abord* $p > 2$. Les conditions d'ordre et de figure, jointes aux conditions nécessaires déjà trouvées, donnent

$$c^{-1}d^{-1}cd = c^{-1}e^{-1}ce = d^{-1}f^{-1}df = 1,$$
$$d^p = c^{-1}f^{-1}cf = e^{-1}d^{-1}ed \neq 1, \qquad d^{p^2} = 1.$$

Un $g_{p^{m-1}}$ quelconque de G est

$$G_{zu} = \{\mathrm{CP}, f^u e^z\} = \{A, c, d, f^u e^z\} \qquad (z \text{ ou } u \not\equiv 0);$$

on voit directement que G_{zu} (z ou $u \not\equiv 0$) n'est pas abélien et a pour central $\{A, d^u c^z\}$. Alors pour que tout $g_{p^{m-2}}$ de G soit abélien il faut et suffit que tout G_{zu}(z ou $u \not\equiv 0$) ait tous ses diviseurs abéliens, c'est-à-dire que l'on ait pour tout système de valeurs non simultanément $\equiv 0$ de z, u

$$\{A, d^u c^z\} = \{c^p, d^p, f^{pu}e^{pz}, d^{-pz}, d^{pu}\}$$
$$= \{c^p, d^p, f^{pu}e^{pz}\} = \{c^p, d^p, d^u c^z a_{zu}\},$$

a_{zu} étant dans A. Comme A est d'indice p dans $\{A, d^u c^z\}$, comme $\{c^p, d^p, d^{pu}c^{pz}a_{zu}^p\}$ ou $\{c^p, d^p, a_{zu}^p\}$ divise A et est d'indice p dans

$\{c^p, d^p, d^u c^z a_{zu}\}$, l'égalité $\{A, d^u c^z\} = \{c^p, d^p, d^u c^z a_{zu}\}$ équivaut à $A = \{c^p, d^p, a_{zu}^p\}$, exige que a_{zu} soit dans $\{c^p, d^p\}$ et équivaut par suite à $A = \{c^p, d^p\}$. Ainsi *pour que tout $g_{p^{m-2}}$ de* G *soit abélien il faut et suffit maintenant que* $A = \{c^p, d^p\}$; A étant par suite de figure (s) ou $(s\,1)$, G *est de figure* $(s)(1\,1)(1\,1)$ *ou* $(s\,1)(1\,1)(1\,1)$.

Parmi les types tous connus [1] de figure $(s)(1\,1)(1\,1)$ *un et un seul satisfait aux conditions énoncées; ses équations sont* (type II 2) [2].

$$a^{p^s} = 1, \qquad b^p = a, \qquad c^p = a^{p^{s-1}}, \qquad d^p = b, \qquad e^p = c,$$
$$c^{-1}bc = d^{-1}bd = b, \qquad e^{-1}be = ba^{p^{s-1}},$$
$$d^{-1}cd = ca^{-p^{s-1}}, \qquad e^{-1}ce = c, \qquad e^{-1}de = dc.$$

Si G est de figure $(s\,1)(1\,1)(1\,1)$, ses équations peuvent s'écrire, en tenant compte des conditions d'ordre et de figure et changeant un peu les notations,

$$a^{p^s} = b^p = 1, \qquad c^p = b^\beta a^\alpha, \qquad d^p = b^{\beta'} a^{\alpha' p^{s-1}},$$
$$e^p = c, \qquad f^p = d^{\beta''} a^{\alpha''},$$
$$d^{-1}cd = e^{-1}ce = c, \qquad f^{-1}cf = cb^{\beta'} a^{\alpha' p^{s-1}},$$
$$e^{-1}de = db^{-\beta'} a^{-\alpha' p^{s-1}}, \qquad f^{-1}df = d, \qquad f^{-1}ef = ed.$$

La condition $A = \{c^p, d^p\}$ qui équivaut à $\alpha\beta' - \beta\alpha' p^{s-1} \not\equiv 0$ montre que l'on peut prendre c^p pour a et d^p pour b, c'est-à-dire faire $\alpha = \beta' = 1$, $\beta = \alpha' = 0$; en prenant ensuite $a^{1-p\beta''}$ pour a, $ca^{-\beta''}$ pour c, $ec^{-\beta''}$ pour e, $fd^{-\beta''}c^{-\alpha''}$ pour f, on peut faire $\alpha'' = \beta'' = 0$. *Donc pour chaque valeur de s un $g_{p^{s+5}}$ et un seul de figure* $(s\,1)(1\,1)(1\,1)$ *a tous ses diviseurs d'indice p^2 abéliens; ses équations sont*

$$a^{p^s} = b^p = 1, \qquad c^p = a, \qquad d^p = b, \qquad e^p = c, \qquad f^p = d,$$
$$d^{-1}cd = e^{-1}ce = c, \qquad f^{-1}cf \equiv cb, \qquad e^{-1}de = db^{-1},$$
$$f^{-1}df = d, \qquad f^{-1}ef = ed.$$

Soit maintenant $p = 2$. Les conditions d'ordre et de figure de G jointes aux conditions nécessaires précédemment trouvées

---

[1] *Thèse*, n° 11, p. 17-21, 157; DE SÉGUIER, *Éléments*, n° 158.

[2] Ce type présente par erreur l'équation $d^p = 1$ au lieu de $d^p = c$.

donnent
$$d^2 = d^{-1}e^{-1}de = d^{-1}f^{-1}df \neq 1, \qquad d^4 = 1.$$

Un $g_{2^{m-1}}$ quelconque de G est $G_{yz} = \{A, d, f^z e^y\}$ (y ou $z \equiv 1$); G_{yz} est non abélien toujours et seulement si $y \not\equiv z$, et en ce cas G_{yz} a pour central A. Alors, pour que tout $g_{2^{m-2}}$ de G soit abélien, il faut et suffit que tout $G_{yz} (y \not\equiv z)$ ait tous ses diviseurs abéliens, c'est-à-dire que l'on ait, pour tout système y, z vérifiant $y + z \equiv 1$,
$$A = \{d^2, (f^z e^y)^2, d^{-1}(f^z e^y)^{-1} df^z e^y\} = \{d^2, f^{2z} e^{2y}\}.$$

Donc, *pour que tout* $g_{2^{m-2}}$ *de* G *soit abélien, il faut et suffit maintenant*
$$A = \{d^2, e^2\} = \{d^2, f^2\}.$$

A étant par suite de figure (s) ou (s 1), G *est de figure* (s) (1) (1 1) ($s > 1$) ou (s 1) (1) (1 1).

Les $g_{2^{s+3}}$ de figure (s) (1) (1 1) (¹) et les $g_{2^{s+4}}$ de figure (s 1) (1) (1 1) (²) sont tous connus. Les conditions trouvées montrent que, *pour chaque valeur de s, un* $g_{2^{s+3}}$ *de figure* (s) (1) (1 1) *et un seul* ($s > 1$) *dont les équations sont*

$$a^{2^s} = 1, \quad b^2 = a^{2^{s-1}}, \quad c^2 = d^2 = a, \quad c^{-1}bc = d^{-1}bd = ba^{2^{s-1}}, \quad d^{-1}cd = cb$$

ainsi que deux $g_{2^{s+4}}$ *de figure* (s 1) (1) (1 1) *et seulement deux dont les équations sont* (types 22)

$$a^{2^s} = b^2 = 1, \quad c^2 = b, \quad d^2 = a\ (^3), \quad e^2 = b^{\beta''} a \qquad (\beta'' = 0, 1),$$
$$d^{-1}cd = e^{-1}ce = cb, \quad e^{-1}de = dc$$

ont tous leurs diviseurs d'indice 4 *abéliens.*

9. *Supposons maintenant* C *non cyclique,* et soit

$$e^{-1}de = db, \quad f^{-1}df = dc, \quad f^{-1}ef = ed, \quad e^{-1}ce = cc', \quad f^{-1}bf = bb'.$$

L'égalité $f^{-1}e^{-1}def = f^{-1}dbf$ donne
$$b' = c';$$

(¹) De Séguier, *Eléments*, n° 150, p. 130-132.

(²) *Thèse*, n° 9, p. 11-14, 159.

(³) Dans ma Thèse, l'équation indiquée (p. 156) pour le type 22 de la figure (s 1) (1) (1 1) est par erreur $d^2 = 1$.

soit donc

$$b' = c' = a.$$

Les deux groupes $\{CP, e\} = \{C, e, f^p\}$ et $\{CP, f\} = \{C, e^p, f\}$ ont tous leurs diviseurs abéliens, donc a, b, c^p, d^p, f^{p^2} sont permutables à e, et a, b^p, c, d^p, e^{p^2} sont permutables à f, en sorte que a, b^p, c^p, d^p, e^{p^2}, f^{p^2} sont normaux; on trouve d'ailleurs par récurrence

$$e^{-u} c^y e^u = c^y a^{yu}, \qquad f^{-v} b^x f^v = b^x a^{xv},$$
$$e^{-u} d^z e^u = d^z b^{zu}, \qquad f^{-v} d^z f^v = d^z c^{zv}, \qquad f^{-v} e^u f^v = e^u d^{uv} c^{\binom{v}{2}} b^{\binom{u}{2}};$$

il faut donc

$$a^p = b^p = c^p = d^{p^2} = 1.$$

Comme d n'est pas normal on peut supposer par exemple $b \neq 1$, il faut donc $\{CP, e\} = \{d, e\}$, donc c est dans $\{d, e\}$; soit

$$c = e^\gamma d^\beta b^\alpha,$$

l'égalité $e^{-1} c e = ca$ donne $b^\beta = a$, d'où

$$b^\beta = a = 1$$

(si $a \neq 1$, b ne serait pas normal et il faudrait $\beta \neq 0$, en sorte que b^β ne pourrait être normal). *Ainsi b et c sont normaux* et $C = \{b, c, d\}$, d non normal *ne pouvant être dans* $\{b, c\}$. *Tout élément de* G *peut s'écrire* $f^v e^u d^z c^y b^x$; cet élément sera normal toujours et seulement si

$$d^{-v} c^{-\binom{v}{2}} b^{z-uv} = d^u c^z b^{\binom{u}{2}} = 1,$$

ce qui exige $u \equiv v \equiv 0$, *donc* A *divise* CP.

Pour la suite de la discussion, je distinguerai deux cas, suivant que G contient ou non hors de CP un élément $f^z e^y$ permutable à tout élément de C.

10. *Dans la première de ces deux hypothèses,* on peut prendre cet élément pour f, c'est-à-dire supposer $c = 1$. *Alors* $C = \{b, d\}$ *et tout élément de* G *peut s'écrire* $f^u e^z d^y b^x$. De $\{CP, e\} = \{d, e\}$ on tire

$$f^p = e^\gamma d^\beta b^\alpha$$

et la formule $f^{-p}ef^{p} = ed^{p}$ donne

$$b^{-\beta} = d^{p},$$

ce qui (C n'étant pas cyclique) exige $b^{-\beta} = d^{p} = 1$. *Ainsi* $d^{p} = 1$, et C *est un* g_{p^3} *principal. Il faut* $p > 2$; car, si $p = 2$, on a $f^{-1}e^{2}f = e^{2}b$, le $g_{2^{m-1}}$ $\{CP, f\}$ contient le diviseur non abélien $\{e^{2}, f\}$, et l'on a $\{e^{2}, f\} < \{CP, f\}$; si, en effet, $\{e^{2}, f\} = \{CP, f\}$, d serait dans $\{e^{2}, f\}$ donc de la forme $f^{\gamma}e^{2\beta}b^{\alpha}$ et permutable à e^{2} et à f, ce qui exige $\beta \equiv \gamma \equiv 0$, d serait donc normal contrairement à l'hypothèse.

Soit donc

$$p > 2.$$

Tout élément de G pouvant s'écrire mod A $f^{u}d^{z}e^{y}$, G/A est engendré par Ad, Ae, Af, et comme on a

$$d^{p} \equiv e^{p} \equiv f^{p} \equiv 1, \quad e^{-1}de \equiv f^{-1}df \equiv d, \quad f^{-1}ef \equiv ed \qquad \text{mod A},$$

G/A est de figure (1) (11). On a

$$CP = \{b, d, e^{p}, f^{p}\};$$

mais $f^{p} = e^{\gamma}b^{\alpha}$, et, la formule $f^{-1}df^{p} = d$ exigeant $\gamma \equiv 0$, f^{p} est dans $\{e^{p}, b\}$; ainsi $CP = \{b, d, e^{p}\}$; un $g_{p^{m-1}}$ quelconque de G est $G_{yz} = \{b, d, e^{p}, f^{z}e^{y}\}$ (y ou $z \not\equiv 0$); G_{yz} est non abélien toujours et seulement si $y \not\equiv 0$, et en ce cas G_{yz} a pour central A, car $G_{yz} > A$ et $(G_{yz}, A) = p^{2}$. *Pour que tout* $g_{p^{m-2}}$ *de* G *soit abélien il faut et suffit* que tout G_{yz} ($y \not\equiv 0$) ait tous ses diviseurs abéliens, donc que l'on ait, quels que soient y ($\not\equiv 0$) et z,

$$A = \{(f^{z}e^{y})^{p}, d^{-1}(f^{z}e^{y})^{-1}df^{z}e^{y}\} = \{f^{pz}e^{py}, b^{y}\}$$

ou, en tenant compte de $f^{p} = e^{p\gamma}b^{\alpha}$, *que l'on ait, quels que soient* y ($\not\equiv 0$) *et* z,

$$A = \{e^{p(y+\gamma z)}, b^{y}\}.$$

Il faut donc $A = \{e^{p}, b\}$, en sorte que G *est de figure* (s) (1) (11) ($s > 1$) *ou* (s 1) (1) (11). Je laisse de côté le cas où e^{p} est dans b, donc A d'ordre p et G d'ordre p^{4}. Alors, *pour que l'on ait, quels que soient* y ($\not\equiv 0$) *et* z,

$$\{e^{p}, b\} = \{e^{p(y+\gamma z)}, b^{y}\}$$

il faut et suffit que $\gamma \equiv 0$, c'est-à-dire *que* f^p *soit dans* $\{e^{p^2}, b\}$.

Les $g_{p^{s+3}}$ de figure (s) (1) (11) [1] et les $g_{p^{s+4}}$ de figure $(s\,1)$ (1) (11) [2] sont tous connus. En tenant compte de toutes les conditions, on voit que, *pour chaque valeur de s, un* $g_{p^{s+3}}$ $(p > 2)$ *de figure* (s) (1) (11) *et un seul* $(s > 1)$ *dont les équations sont*

$$a^{p^s} = 1, \quad b^p = 1, \quad c^p = a, \quad d^p = 1,$$
$$c^{-1}bc = ba^{p^{s-1}}, \quad d^{-1}bd = b, \quad d^{-1}cd = cb,$$

ainsi que trois $g_{p^{s+4}}$ $(p > 2)$ *de figure* $(s\,1)$ (1) (11) *et seulement trois dont les équations sont* [3]

$$a^{p^s} = b^p = 1, \quad c^p = 1, \; d^p = a, \quad e^p = b^\beta \quad (\beta = 0, 1, \mathrm{N}),$$
$$d^{-1}cd = cb, \quad e^{-1}ce = c, \quad e^{-1}de = dc$$

ont tous leurs diviseurs d'indice p^2 *abéliens.*

11. *Supposons maintenant qu'aucun élément de* G *hors de* CP *n'est permutable à tous les éléments de* $C = \{b, c, d\}$. Comme b et c sont normaux (9), *il faut et suffit pour cela* que G n'ait aucun élément hors de CP permutable à d, c'est-à-dire, comme $e^{-y}f^{-z}df^z e^y = dc^z b^y$, *que b et c soient indépendants. A n'est donc pas cyclique.*

Comme $\{CP, e\}$ et $\{CP, f\}$ ont tous leurs diviseurs abéliens il faut $\{CP, e\} = \{d, e\}$, $\{CP, f\} = \{d, f\}$; ainsi e^p est dans $\{d, f\}$ et par suite de la forme $f^\gamma d^\beta c^\alpha$, f^p est dans $\{d, e\}$ et par suite de la forme $e^{\gamma'} d^{\beta'} b^{\alpha'}$. En tenant compte des formules

$$e^{-p}de^p = f^{-p}df^p = d, \qquad f^{-1}e^p f = e^p d^p b^\varepsilon, \qquad f^{-p}ef^p = ed^p c^\varepsilon$$

et des conditions de permutabilité

$$e^{-1}e^p e = e^p, \qquad f^{-1}f^p f = f^p,$$

on voit qu'il faut

$$\gamma \equiv \gamma' \equiv 0_\gamma \quad (d^p c^\varepsilon)^{-\gamma p^{-1}} b^\beta = (d^p b^\varepsilon)^{\gamma' p^{-1}} c^{\beta'} = 1, \quad c^\beta = d^p b^\varepsilon, \quad b^{-\beta'} = d^p c^\varepsilon,$$

d'où en éliminant d^p,

$$c^{\beta+\varepsilon} b^{\beta'+\varepsilon} = 1, \qquad \text{donc} \qquad \beta + \varepsilon \equiv \beta' + \varepsilon \equiv 0.$$

---

(1) De Séguier, *Éléments*, n° 150, p. 130-132.

(2) *Thèse*, n° 9, p. 11-14, 156.

(3) Ces types ont été par erreur omis dans ma Thèse, p. 13, 156.

Si donc $p > 2$, il faut $\beta \equiv \beta' \equiv 0$, $d^p = 1$; *le commutant est un* g_{p^2} *abélien principal. Si* $p = 2$, il faut $\beta \equiv \beta' \equiv 1$, $d^2 = bc$; mais G *a toujours des diviseurs non abéliens d'indice* 4, on a en effet $\{d, fe\} < \{CP, fe\}$, car, si $\{d, fe\} = \{CP, fe\}$, e^2 serait dans $\{d, fe\}$, donc de la forme $(fe)^z d^y (cb)^x$, la condition $e^{-2} de^2 = d$ exigerait $z \equiv 0$, et, $(fe)^2$ étant normal, la condition $f^{-1} e^2 f = e^2 d^2 b = e^2 c$ exigerait $b^y = c$, ce qui ne se peut.

Soit donc

$$p > 2.$$

Tout élément de G peut s'écrire mod A $f^z e^y d^r$, donc G/A est engendré par Ad, Ae, Af; on a d'ailleurs mod A

$$d^p \equiv e^p \equiv f^p \equiv 1, \quad e^{-1} de \equiv f^{-1} df \equiv d, \quad f^{-1} ef \equiv ed,$$

donc G/A *est de figure* (1) (11). Un $g_{p^{m-1}}$ quelconque de G est $G_{yz} = \{CP, f^z e^y\}$, y ou $z \not\equiv 0$; d'après les hypothèses faites, G_{yz} (y ou $z \not\equiv 0$) n'est jamais abélien et a pour central A, car $G_{yz} > CP > A$, $(G_{yz}, A) = p^2$. Alors, *pour que tout* $g_{p^{m-2}}$ *de* G *soit abélien, il faut et suffit* que tout G_{yz} (y ou $z \not\equiv 0$) ait tous ses diviseurs abéliens, donc *que l'on ait pour tout système de valeurs de* y, z *non simultanément* $\equiv 0$

$$A = \{(f^z e^y)^p, \ d^{-1}(f^z e^y)^{-1} d f^z e^y\} = \{f^{pz} e^{py}, \ c^z b^y\}.$$

Il faut donc $A = \{e^p, b\} = \{f^p, c\}$; A, n'étant pas cyclique, est de figure (s 1) et G *est de figure* (s 1) (1) (11). En tenant compte des diverses conditions trouvées et changeant un peu les notations, les équations de G peuvent s'écrire

$$a^{p^s} = b^p = 1, \qquad c^p = 1, \qquad d^p = b^\beta a^\alpha, \qquad e^p = b^{\beta'} a^{\alpha'},$$
$$d^{-1} cd = cb^\mu a^{\lambda p^{s-1}}, \qquad e^{-1} ce = cb^{\mu'} a^{\lambda' p^{s-1}}, \qquad e^{-1} de = dc,$$

avec les conditions

$$(\lambda\mu' - \mu\lambda') \not\equiv 0,$$
$$\{a, b\} = \{b^{\beta y + \beta' z} a^{\alpha y + \alpha' z}, \ b^{\mu y + \mu' z} a^{(\lambda y + \lambda' z) p^{s-1}}\} \qquad (y \text{ ou } z \not\equiv 0);$$

la deuxième équivaut (n° 2) à

$$(\alpha y + \alpha' z)(\mu y + \mu' z) - (\beta y + \beta' z)(\lambda y + \lambda' z) p^{s-1} \not\equiv 0 \qquad (y \text{ ou } z \not\equiv 0)$$

et exige $s = 1$; G *est* donc *de figure* (11) (1) (11); la première condition montre que l'on peut prendre $b^{\mu}a^{\lambda}$ pour a, $b^{\mu'}a^{\lambda'}$ pour b, c'est-à-dire supposer $\lambda = \mu' = 1$, $\lambda' = \mu = 0$; la deuxième condition devient alors

$$\beta y^2 + (\beta' - \alpha) yz - \alpha' z^2 \not\equiv 0 \qquad (y \text{ ou } z \not\equiv 0)$$

et équivaut à

$$(\alpha - \beta')^2 + 4\beta\alpha' \quad \text{non carré.}$$

Ainsi les $\frac{1}{2}(p+1)$ g_{p^5} $(p > 2)$ *de figure* (11) (1) (11) vérifiant cette condition, *dont les équations sont* [1]

$$a^p = b^p = 1, \quad c^p = 1, \quad d^p = b, \quad e^p = b^{\beta'} a^{\alpha'},$$
$$d^{-1}cd = ca, \quad e^{-1}ce = cb, \quad e^{-1}de = dc,$$
$$\left[\beta' = 1,\ \alpha' = \frac{1}{4}(i^{2n-1} - 1)\left(n = 1, \ldots \frac{p-1}{2}\right);\ \beta' = 0,\ \alpha' = \mathrm{N}\right]$$

et ceux-là seuls ont tous leurs g_{p^3} *abéliens.*

12. Ainsi l'ensemble des g_{p^m} (p premier, $m > 4$) dont tous les $g_{p^{m-2}}$ sont abéliens sans que tous les $g_{p^{m-1}}$ le soient et qui ne sont pas produits directs comprend :

un type de figure $(rs2)$ (11) $\quad (r \geqq s \geqq 1)$ [2]

(1) $\quad a^{p^r} = b^{p^s} = c^{p^2} = 1, \quad d^p = a, \quad e^p = b, \quad e^{-1}de = ec^p;$

un type de figure $(s1)$ (111) $\quad (m > 5$, donc $s > 1)$ [3]

$$(2) \qquad \begin{cases} a^{p^s} = b^p = 1, & c^p = b, \quad d^p = 1, \quad e^p = a, \\ d^{-1}cd = c, & e^{-1}ce = ca^{p^{s-1}}, \quad e^{-1}de = db; \end{cases}$$

$\frac{1}{2}(p+3)$ types de figure (11) (111) $\quad (m = 5, p > 2)$ [4]

$$\begin{array}{ll} (3) & \\ (4) & a^p = b^p = 1, \\ (5) & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} c^p = 1,\ d^p = a,\ e^p = b^{-1}, \\ c^p = b,\ d^p = a^{\mathrm{N}},\ e^p = 1, \\ c^p = b,\ d^p = ba^{\frac{1}{4}i^{2n-1}-1},\ e^p = 1, \left(n = 1, \ldots, \dfrac{p-1}{2}\right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} d^{-1}cd = c, \\ e^{-1}ce = ca, \\ e^{-1}de = db; \end{array}$$

---

(1) De Séguier, *Éléments*, n° 157, p. 141.
(2) *Thèse*, n° 17.
(3) *Thèse*, n° 19, type (7) de la figure $(s1)$ (111) $(s > 1)$, p. 160.
(4) *Thèse*, n° 19.

deux types de figure (11)(111) $\quad (m = 5,\ p = 2)$ (¹)

$$
\begin{array}{ll}
(6) & \\
 & a^2 = b^2 = 1,\ c^2 = b, \left\{ \begin{array}{l} d^2 = a,\quad e^2 = a, \\ \\ d^2 = ba,\ e^2 = 1, \end{array} \right\} d^{-1}cd = c,\ e^{-1}ce = ca,\ e^{-1}de = db; \\
(7) &
\end{array}
$$

$\frac{1}{2}(p + 1)$ types de figure $(s\,1\,1)\,(1\,1\,1)$ $\quad (p > 2)$ (²)

$$
(8)\quad \left\{ \begin{array}{c} a^{p^s} = b^p = c^p = 1, \qquad d^p = c, \qquad e^p = c^\gamma b^\beta, \\ \left[\beta = \mathrm{N},\ \gamma = 0;\ \beta = \frac{1}{4}(i^{2n-1} - 1),\ \gamma = 1 \left(n = 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)\right], \\ e^{-1}de = d, \qquad f^{-1}df = db, \qquad f^{-1}ef = ec; \end{array} \right.
$$

un type de figure $(s\,1\,1)\,(\overline{1\,1\,1})$ $\quad (p = 2)$ (³)

$$
(9)\quad \left\{ \begin{array}{l} a^{2^s} = b^2 = c^2 = 1, \qquad d^2 = c, \qquad e^2 = cb, \qquad f^2 = a, \\ \qquad e^{-1}de = d, \qquad f^{-1}df = db, \qquad f^{-1}ef = ec; \end{array} \right.
$$

un, deux ou trois types de figure $(rs)\,(22)$ $\quad (r \geqq s \geqq 2)$ (⁴)

$$
\begin{array}{ll}
(10) & \\
(11) & a^{p^r} = b^{p^s} = 1,\ c^{p^2} = b,\ d^{p^2} = a \left\{ \begin{array}{ll} d^{-1}cd = cb^{p^{s-2}}, & (r \geqq s); \\ d^{-1}cd = cb^{p^{s-1}}a^{p^{r-2}}, & (r - 1 \geqq s); \\ d^{-1}cd = ca^{p^{r-2}}, & (r - 1 > s); \end{array} \right. \\
(12) &
\end{array}
$$

un type de figure $(s)\,(1)\,(1\,1)$ $\quad (s > 1,\ p > 2)$ (n° 10)

$$
(13)\quad \left\{ \begin{array}{l} \qquad a^{p^s} = b^p = 1, \qquad c^p = a, \qquad d^p = 1, \\ c^{-1}bc = ba^{p^{s-1}}, \qquad d^{-1}bd = b, \qquad d^{-1}cd = cb; \end{array} \right.
$$

un type de figure $(s)\,(1)\,(1\,1)$ $\quad (s > 1,\ p = 2)$ (n° 8)

$$
(14)\quad a^{2^s} = b^2 = 1,\ c^2 = d^2 = a,\ c^{-1}bc = d^{-1}bd = ba^{2^{s-1}},\ d^{-1}cd = cb;
$$

trois types de figure $(s\,1)\,(1)\,(1\,1)$ $\quad (p > 2)$ (n° 10)

$$
(15)\quad \left\{ \begin{array}{l} a^{p^s} = b^p = c^p = 1, \qquad d^p = a, \qquad e^p = b^\beta \quad (\beta = 0, 1, \mathrm{N}), \\ \qquad d^{-1}cd = cb, \qquad e^{-1}ce = c, \qquad e^{-1}de = dc, \end{array} \right.
$$

(¹) *Thèse*, n° 19, p. 40.

(²) *Thèse*, nos 20-23, types (1) et (2) de la figure $(s\,1\,1)\,(1\,1\,1)$ $(s > 1)$, p. 161, types (26) et (27) de la figure (111) (111), p. 162.

(³) *Thèse*, nos 20-23, type (3) de la figure $(s\,1\,1)\,(1\,1\,1)$ $(s > 1)$, p. 161, type (30) de la figure (111) (111), p. 162.

(⁴) *Thèse*, n° 24, types (1), (2), (3) de figure $(rs)\,(22)$, p. 163.

$\frac{1}{2}(p+1)$ types de figure (11)(1)(11) $(p>2,\ m=5)$ (n° 11)

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} a^p=b^p=c^p=1, \qquad d^p=b, \qquad e^p=b^\beta a^\alpha, \\ \left[\alpha=\mathrm{N},\ \beta=0;\ \alpha=\frac{1}{4}(i^{2n-1}-1),\ \beta=1,\ \left(n=1,\ \ldots,\frac{p-1}{2}\right)\right], \\ d^{-1}cd=ca, \qquad e^{-1}ce=cb, \qquad e^{-1}de=dc; \end{array}\right.$$

deux types de figure $(s\,1)$ (1) (11) $(p=2)$ (n° 8)

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} a^{2^s}=b^2=1, \qquad c^2=b, \qquad d^2=a, \qquad e^2=b^{\beta''}a \qquad (\beta''=0,\ 1), \\ d^{-1}cd=e^{-1}ce=cb, \qquad e^{-1}de=dc, \end{array}\right.$$

un type de figure (s) (11) (11) $(p>2)$ (n° 8)

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} a^{p^s}=1,\ b^p=a,\ c^p=a^{p^{s-1}},\ d^p=b,\ e^p=c, \\ c^{-1}bc=d^{-1}bd=b,\ e^{-1}be=ba^{p^{s-1}},\ d^{-1}cd=ca^{-p^{s-1}}, \\ e^{-1}ce=c,\ e^{-1}de=dc; \end{array}\right.$$

un type de figure $(s\,1)$ (11) (11) $(p>2)$ (n° 8)

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} a^{p^s}=b^p=1,\ c^p=a,\ d^p=b,\ e^p=c,\ f^p=d, \\ d^{-1}cd=e^{-1}ce=c,\ f^{-1}cf=cb,\ e^{-1}de=db^{-1},\ f^{-1}df=d, \\ f^{-1}ef=ed. \end{array}\right.$$