BULLETIN DE LA S. M. F.

L. LECORNU

Sur le mouvement d'un point pesant guidé par une courbe rigide

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 50-56
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__50_1>

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT PESANT GUIDÉ PAR UNE COURBE RIGIDE;

Par M. L. Lecornu.

L'expérience dite *bouclage de la boucle* donne une certaine actualité à la question suivante que je me propose d'examiner ici en détail [1] :

Quelle doit être la forme d'une courbe rigide, située dans un plan vertical pour qu'un mobile pesant qui parcourt cette courbe sans frottement exerce sur elle une pression constante.

Pour fixer les idées supposons jusqu'à nouvel ordre que la courbe tourne sa concavité vers le bas et que le mobile posé du côté de cette concavité est animé d'un mouvement descendant. J'appelle θ l'angle aigu de la tangente avec l'horizontale, v la vitesse, ρ le rayon de courbure. Je prends la masse du mobile égale à l'unité et je désigne par g son poids, par λg l'action de la courbe sur le mobile égale et opposée à la pression constante du mobile sur la courbe.

On a la relation

$$(1) \qquad \frac{v^2}{\rho} = g(\lambda + \cos\theta),$$

à laquelle s'ajoute l'équation des forces vives

$$(2) \qquad v\,dv = g\sin\theta\,ds.$$

L'arc élémentaire ds est lié au rayon de courbure par la for-

[1] M. Bourlet (*Nouvelles Annales*, avril 1903) a déjà abordé cette question et montré que, même en tenant compte d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse, le problème se ramène à des quadratures.

mule $\rho = \frac{ds}{d\theta}$. L'élimination de ρ et de ds donne

$$(3)\qquad \frac{dv}{v} = \frac{\sin\theta\, d\theta}{\lambda + \cos\theta},$$

d'où, en appelant k une constante arbitraire,

$$(4)\qquad v = \frac{k}{\lambda + \cos\theta}.$$

Portons dans (1) cette valeur de v. Il vient

$$(5)\qquad \rho = \frac{k^2}{g(\lambda + \cos\theta)^3} = \frac{v^3}{kg}.$$

Le rayon de courbure est donc proportionnel au cube de la vitesse. Soit y la distance du mobile à l'horizontale sur laquelle sa vitesse s'annulerait. On a

$$(6)\qquad y = \frac{v^2}{2g} = \frac{k^2}{2g(\lambda + \cos\theta)^2}.$$

La comparaison des équations (5) et (6) donne

$$(7)\qquad \rho = \frac{2\sqrt{2g}}{k}\, y^{\frac{3}{2}}.$$

Le carré du rayon de courbure est donc proportionnel au cube de l'ordonnée.

On retrouve là une propriété connue de la parabole ; celle-ci est une solution particulière de la question : elle correspond au cas où la pression est nulle.

Signalons en passant la solution singulière $\rho = \infty$, $\cos\theta = -\lambda$, qui correspond à une droite inclinée : il est clair d'ailleurs que toute trajectoire rectiligne répond à la question.

L'équation (4) admet une interprétation remarquable. Si l'on construit l'*hodographe* du mouvement en menant par une origine fixe un vecteur égal et parallèle à la vitesse v, les coordonnées polaires d'un point de cette hodographe sont v, θ. On en conclut immédiatement que :

L'hodographe est une section conique.

Soient a le demi-grand axe de cette conique et e son excentricité. En identifiant l'équation (4) avec l'équation

$$v = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta},$$

on trouve

$$e = \frac{1}{\lambda}, \qquad a = \frac{ke}{1-e^2} = \frac{k\lambda}{\lambda^2 - 1}.$$

D'après cela l'hodographe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que la pression du mobile sur sa trajectoire est supérieure, égale ou inférieure au poids.

La vitesse aréolaire sur l'hodographe est $v^2 \frac{d\theta}{dt}$ ou $\frac{v^3}{\rho}$. Elle est donc, en vertu de la relation (5) égale à la constante kg. Comme l'origine de l'hodographe est un foyer de la conique, la constance de la vitesse aréolaire montre qu'on se trouve en présence du mouvement planétaire. En d'autres termes : *si x, y sont les coordonnées du mobile pesant, le point dont les coordonnées sont $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ se meut exactement comme une planète.*

Voici un corollaire de ce théorème. On sait que la vitesse du point qui décrit l'hodographe est identique à l'accélération totale du mobile considéré. Or, dans le cas présent, l'accélération totale, par hypothèse, est la résultante d'une accélération verticale g et d'une accélération λg normale à la vitesse. Ces deux composantes sont constantes. Si l'on revient à l'hodographe, on voit que :

Dans le mouvement planétaire la vitesse est à chaque instant la résultante de deux vitesses constantes, l'une perpendiculaire au grand axe et l'autre normale au rayon vecteur issu du Soleil.

Il est d'ailleurs aisé de vérifier directement ce résultat.

Une autre conséquence du même théorème consiste dans la possibilité d'utiliser, pour l'étude du mouvement avec pression constante, les formules classiques dans lesquelles intervient l'anomalie excentrique.

Admettons d'abord que l'hodographe soit elliptique et appelons u

l'anomalie excentrique. On a

$$v = a(1 - e\cos u),$$

$$\cos\theta = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}, \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1 - e\cos u}, \qquad \tang\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tang\frac{u}{2},$$

$$u - e\sin u = nt.$$

Le moyen mouvement n qui figure dans cette dernière formule est égal à la constante des aires, qui est ici kg, divisée par ab. Donc

$$n = \frac{kg}{a^2\sqrt{1-e^2}} = \frac{g\sqrt{1-e^2}}{ae}.$$

Ces équations déterminent, en fonction du temps, la vitesse v et l'inclinaison θ de la tangente sur l'horizontale.

L'ordonnée y est fournie immédiatement par la relation

$$(8) \qquad y = \frac{v^2}{2g} = \frac{a^2}{2g}(1 - e\cos u)^2.$$

Pour avoir l'abscisse x, il suffit d'intégrer la relation

$$dx = \cos\theta\, ds = v\cos\theta\, dt = \frac{a}{n}(1 - e\cos u)(\cos u - e)du.$$

Le calcul ne présente aucune difficulté et, en remplaçant n par sa valeur, on trouve

$$(9) \qquad x = \frac{a^2 e}{\sqrt{1-e^2}\,g}\left[-\frac{3}{2}eu + (1+e^2)\sin u - \frac{e}{4}\sin 2u\right].$$

On connaît ainsi x, y en fonction de l'anomalie excentrique, et par conséquent en fonction du temps.

Si l'on forme l'expression $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on trouve

$$ds = \frac{a^2 e}{g\sqrt{1-e^2}}(1 - e\cos u)^2 du = \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}}y\, du.$$

L'intégration donne

$$s = \frac{a^2 e}{\sqrt{1-e^2}\,g}\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right)u - 2e\sin u + \frac{e^2}{4}\sin 2u\right].$$

La valeur de y peut se mettre sous la forme analogue

$$y = \frac{a^2}{2g}\left(1 + \frac{e^2}{2} - 2e\cos u + \frac{e^2}{2}\cos 2u\right).$$

Ces diverses formules montrent que l'expression $3es + (2+e^2)x$ est fonction linéaire de $\sin u$, $\sin 2u$ et par conséquent s'exprime algébriquement en fonction de y. L'arc s est donc fonction algébrique des coordonnées de son extrémité variable.

La valeur de x ne se présente sous forme réelle que si l'excentricité e est inférieure à l'unité. Dans le cas où l'hodographe est hyperbolique ($e > 1$) on ramène à la forme réelle en posant $u = i\omega$, ce qui introduit des sinus et des cosinus hyperboliques. Les formules deviennent

$$(10)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{a^2 e}{g\sqrt{e^2-1}}\left[-\frac{3}{2}e\omega + (1+e^2)\,\mathrm{Sh}\,\omega - \frac{e}{4}\mathrm{Sh}\,2\omega\right], \\ y &= \frac{a^2}{2g}\left[1 + \frac{e^2}{2} - 2e\,\mathrm{Ch}\,\omega + \frac{e^2}{2}\mathrm{Ch}\,2\omega\right], \\ \omega - e\,\mathrm{Sh}\,\omega &= \frac{\sqrt{e^2-1}}{ae}\,gt. \end{aligned}$$

Les deux coordonnées sont infinies en même temps que t. La courbe, symétrique par rapport à l'axe des y, présente deux branches paraboliques dont les directions asymptotiques sont $\tan g\theta = \pm\sqrt{e^2-1}$. La valeur de x, positive pour les petites valeurs de t, devient ensuite négative : il y a donc un point double réel sur l'axe des y.

L'hodographe est constituée par la branche d'hyperbole tournant sa concavité vers le foyer.

Le cas intermédiaire $e = 1$ correspond à l'hodographe parabolique. Remplaçons, dans la formule (9), a par sa valeur $\frac{ke}{1-e^2}$. Pour que x demeure fini quand e tend vers l'unité, il faut que u soit infiniment petit. Développant alors la valeur de u suivant les puissances croissantes de u, on reconnaît que u doit être du même ordre que $\sqrt{1-e}$.

Si l'on pose $\frac{u}{2\sqrt{1-e}} = \varphi$, il vient à la limite

$$x = \frac{k^2}{4g}\left(\varphi - \frac{\varphi^5}{5}\right).$$

On trouve aussi

$$y = \frac{k^2}{8g}(1+\varphi^2)^2, \qquad \varphi + \frac{\varphi^3}{3} = \frac{2gt}{k}.$$

La trajectoire est une courbe unicursale du cinquième ordre avec un point double réel ($\varphi^4 = 5$) et deux branches paraboliques à direction asymptotique horizontale.

Si l'on fait croître e jusqu'à $+\infty$, on parvient au mouvement parabolique ordinaire dont l'hodographe est une droite verticale.

Restent à examiner les valeurs négatives de e. Le changement de signe de e, et par conséquent de λ, nous avertit que la pression est renversée, c'est-à-dire que le mobile est de l'autre côté de sa trajectoire. Pour bien voir comment les choses se passent, partons de la position pour laquelle $\theta = 0$ et soit v_0 la vitesse correspondante. La formule (4) devient $v = v_0 \frac{\lambda + 1}{\lambda + \cos\theta}$. Remplaçons λ par $-\frac{1}{e'}$, e' étant la valeur absolue de e. Nous avons ainsi $v = v_0 \frac{e' - 1}{e' \cos\theta - 1}$. Si e' est compris entre 1 et ∞, l'hodographe est une branche d'hyperbole tournant sa convexité vers le foyer. Les directions asymptotiques sont données par $\cos\theta = \frac{1}{e'}$, d'où $\operatorname{tang}\theta = \sqrt{e'^2 - 1}$. La valeur (10) de x, dans laquelle il faut maintenant changer e en $-e'$, ne s'annule plus pour aucune valeur de ω_1 autre que zéro, c'est-à-dire qu'il n'y a plus de point double réel sur l'axe de symétrie.

A mesure que la valeur absolue de e' se rapproche de l'unité, les deux asymptotes de l'hodographe tendent à se confondre ; finalement, pour $e' = 1$, l'hodographe se réduit à une demi-droite horizontale. En même temps la trajectoire du mobile a pour limite une droite horizontale sur laquelle celui-ci se trouve posé : pour une pareille droite il est clair que la pression exercée par le mobile est égale à son poids, ce qui correspond bien à l'hypothèse $e' = 1$.

Supposons enfin e' compris entre l'unité et zéro. L'équation (1) mise sous la forme $\frac{v^2}{\rho} = g\left(\cos\theta - \frac{1}{e'}\right)$ montre que ρ est maintenant négatif, et en particulier que pour le point de départ ($\theta = 0$) la concavité de la courbe est tournée vers le haut. L'hodographe est d'ailleurs elliptique et l'on retrouve la forme de trajectoire déjà rencontrée pour les valeurs de e comprises entre zéro et l'unité avec cette seule différence que le point de départ est à un sommet inférieur au lieu d'un sommet supérieur.

Fig. 1.

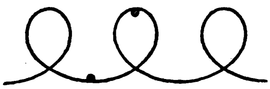


Fig. 2.

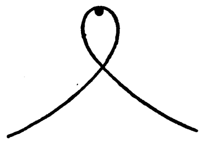
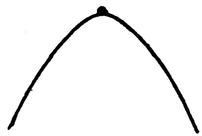


Fig. 3.



Les trois figures ci-dessus résument toute la discussion. La figure 1 correspond à l'hodographe elliptique (λ supérieur à 1 ou inférieur à $\varepsilon - 1$). La figure 2 se rapporte à l'hodographe hyperbolique avec valeur positive de $\lambda (\lambda < 1)$ et la figure 3 à l'hodographe hyperbolique avec valeur négative de $\lambda (\lambda > -1)$. Les petits disques hachurés indiquent de quel côté de la trajectoire circule le mobile pesant.