

# BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FONTENÉ

## **Sur l'extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet par des polyèdres de genre un**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 33 (1905), p. 115-123

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1905\\_\\_33\\_\\_115\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__115_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

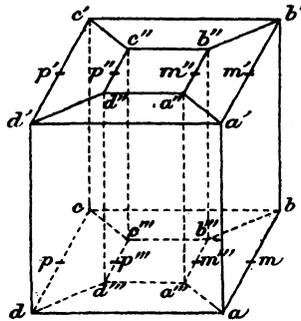
<http://www.numdam.org/>

**SUR L'EXTENSION A L'ESPACE  
DU THÉORÈME DES POLYGONES DE PONCELET PAR DES POLYÈDRES  
DE GENRE UN;**

Par M. G. FONTENÉ.

1. Cette Note fait suite au Mémoire qui a paru dans le *Bulletin* sur le même sujet. Je remplacerai l'expression *polyèdre torique* par l'expression *polyèdre réticulé*, qui rappelle la disposition des sommets en  $q$  séries de  $p$  sommets d'une part, en  $p$  séries de  $q$  sommets d'autre part, et de même pour les faces.

Fig. 1.



Soit  $p = 4, q = 4$  (fig. 1). Les sommets sont, avec leur double classement,

$$(1) \quad \begin{cases} a, & b, & c, & d, \\ a', & b', & c', & d', \\ a'', & b'', & c'', & d'', \\ a''', & b''', & c''', & d''', \end{cases}$$

et les faces sont

$$\begin{array}{cccc} a b b' a', & b c c' b', & c d d' c', & d a a' d', \\ a' b' b'' a'', & b' c' c'' b'', & c' d' d'' c'', & d' a' a'' d'', \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots; \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{array}$$

Appelons *sommets opposés* deux sommets tels que  $a$  et  $c''$ ,  $a'$

et  $c'''$ , ..., et supposons que *les sommets opposés coïncident deux à deux*.

Si l'on considère les lignes du tableau (1), les sommets  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$ ,  $d''$  se confondront respectivement avec  $c$ ,  $d$ ,  $a$ ,  $b$ , et  $a'''$ ,  $b'''$ ,  $c'''$ ,  $d'''$  se confondront de même avec  $c'$ ,  $d'$ ,  $a'$ ,  $b'$ ; si l'on considère les colonnes du tableau (1), on dira que  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$ ,  $c'''$  se confondent avec  $a''$ ,  $a'''$ ,  $a$ ,  $a'$ , et  $d$ ,  $d'$ ,  $d''$ ,  $d'''$  avec  $b''$ ,  $b'''$ ,  $b$ ,  $b'$ ; on a

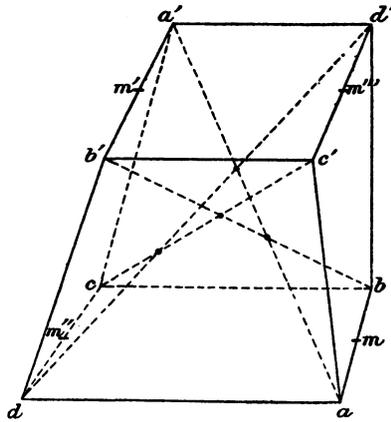
$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a, b, c, d, \\ a', b', c', d', \\ c, d, a, b, \\ c', d', a', b', \end{array} \right.$$

ou

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{l} a, b, a'', b'', \\ a', b', a''', b''', \\ a'', b'', a, b, \\ a''', b''', a', b'. \end{array} \right.$$

Le polyèdre obtenu est celui de la figure 2, avec 8 sommets té-

Fig. 2.

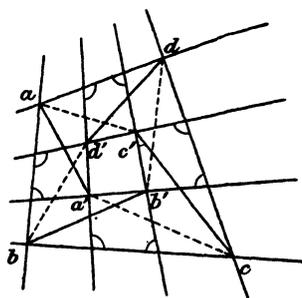


traèdres, 8 faces quadrangulaires, 16 arêtes ( $F + S = A$ ); les faces, fournies par le tableau (2), sont les quadrilatères  $abb'a'$ ,  $bcc'b'$ , ..., et les quadrilatères  $d'b'dc$ ,  $b'c'ad$ , ...

On retrouve ainsi le polyèdre à 8 sommets et à 8 faces signalé

par M. Bricard (*Nouvelles Annales*, 1904); on passe des notations de cet auteur aux notations actuelles en remplaçant  $a'$ ,  $b'$ , ... par  $b'$ ,  $c'$ . .... M. Bricard observe que chacune des 4 droites  $ab$ ,  $cd$ ,  $a'd'$ ,  $b'c'$  rencontre les 4 droites  $a'b'$ ,  $c'd'$ ,  $ad$ ,  $bc$  [lignes du tableau (2)], de sorte que l'on a là quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde et quatre génératrices de l'autre sys-

Fig. 3.



tème; sur la figure 3, on a indiqué par des arcs de cercle les plans des 8 faces du polyèdre.

[Chacune des quatre droites  $aa'$ ,  $cc'$ ,  $bd'$ ,  $db'$ , à gauche et à droite dans la figure 3, rencontre de même les 4 droites  $bb'$ ,  $dd'$ ,  $ac'$ ,  $ca'$ , en bas et en haut de cette figure (colonnes du tableau 2); cela revient à dire que chacune des 4 droites  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ ,  $dd'$ , tracées en trait plein, rencontre la suivante, cycliquement, et que la même chose a lieu pour  $ac'$ ,  $bd'$ ,  $ca'$ ,  $db'$ , tracées en pointillé.]

Réciproquement, si l'on trace sur un hyperboloïde 4 génératrices d'un système, 4 de l'autre, on en déduit un polyèdre de l'espèce indiquée; le polyèdre dépend donc de 17 paramètres, au lieu de 16 que l'on pourrait prévoir, et, sans parler d'hyperboloïde, cela tient à ce que 15 des 16 rencontres de 2 systèmes de 4 droites entraînent la 16<sup>e</sup>.

Les sommets d'un tel polyèdre forment un système ponctuel de Lamé : ils sont en effet, de 4 manières, répartis 4 par 4 sur 2 plans (*fig. 2*); les faces forment un système tangentiel de Lamé.

De tout cela il résulte, comme l'observe M. Bricard, que le problème de construire un tel polyèdre circonscrit à une qua-

drique  $\Sigma$  et inscrit à une quadrique  $\Sigma'$ , au lieu d'être un problème déterminé en apparence, est un problème triplement indéterminé en apparence; et la question qui se pose est de rechercher si, contrairement à toute vraisemblance, les quadriques ne doivent pas ici encore satisfaire à une condition : cette condition remplie, le problème serait quadruplement indéterminé. On va voir qu'il en est ainsi.

2. Dans un article inséré aux *Nouvelles Annales*, 1904, j'ai considéré un cas particulier pour obtenir la condition de fermeture relative aux valeurs  $p = 4$ ,  $q = 4$ ; j'ai trouvé que la fermeture peut avoir lieu sous deux conditions différentes; je montrerai ici que l'une des conditions se rapporte effectivement au polyèdre de la figure 1 ( $p = 4$ ,  $q = 4$ ), tandis que l'autre est relative au polyèdre de la figure 2 ( $F = S = 8$ ); c'est même en cherchant à interpréter plus complètement les deux conditions en question que j'ai été conduit à retrouver le polyèdre de M. Bricard comme un cas de dégénérescence du polyèdre réticulé à 16 sommets et à 16 faces.

Soient les deux quadriques de révolution

$$(\Sigma) \quad a(x^2 + y^2) + cz^2 + d = 0,$$

$$(\Sigma') \quad a'(x^2 + y^2) + c'z^2 + 2mz + d' = 0,$$

et un polyèdre tel que celui de la figure 1 ( $p = 4$ ,  $q = 4$ ), ou celui de la figure 2 ( $F = S = 8$ ), circonscrit à  $\Sigma$  et inscrit à  $\Sigma'$ . Nous supposons que les contours généralement gauches  $abcd$ ,  $a'b'c'd'$ ,  $a''b''c''d''$ ,  $a'''b'''c'''d'''$  (ces deux derniers confondus avec  $cdab$  et  $c'd'a'b'$  dans le cas de la figure 2) sont des carrés, situés dans des plans parallèles au plan des  $xy$ , ayant leurs côtés parallèles, et dont les centres sont sur l'axe des  $z$ . Le plan des  $zx$  étant supposé perpendiculaire aux arêtes  $ab$ ,  $a'b'$ ,  $a''b''$ ,  $a'''b'''$  (qui sont en même temps  $c''d''$ ,  $c'''d'''$ ,  $cd$ ,  $c'd'$  dans la figure 2), en leurs milieux  $m$ ,  $m'$ ,  $m''$ ,  $m'''$ , on a dans ce plan un quadrilatère  $mm'm''m'''$  (trapèze isocèle pour le cas de la figure 2) circonscrit à la conique

$$(S) \quad y = 0, \quad ax^2 + cz^2 + d = 0.$$

Les points  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$ ,  $a'''$  sont sur la conique obtenue en coupant la quadrique  $(\Sigma')$  par le plan  $y = x$ , et les points  $m$ ,  $m'$ , ... sont sur

la conique

$$(S') \quad y = 0, \quad 2a'x^2 + c'z^2 + 2mz + d' = 0,$$

projection de la précédente sur le plan des  $zx$ .

La condition de fermeture pour des quadrilatères circonscrits à  $S$  et inscrits à  $S'$  est celle-ci : l'équation en  $\lambda$  relative aux deux coniques étant formée d'après l'équation

$$\lambda S + S' = 0,$$

l'une des racines doit être égale à la somme des deux autres. L'une des valeurs de  $\lambda$  est ici

$$\lambda = \frac{-2a'}{a},$$

et les deux autres sont données par l'équation

$$(\lambda c + c')(\lambda d + d') - m^2 = 0;$$

en désignant par  $\lambda'$  et  $\lambda''$  les racines de cette équation, on doit avoir

$$(3) \quad -\frac{2a'}{a} = \pm(\lambda' - \lambda'')$$

ou

$$(4) \quad -\frac{2a'}{a} = \lambda' + \lambda''.$$

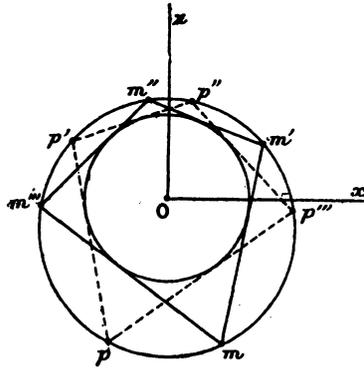
Mais, selon que l'une ou l'autre de ces conditions aura lieu, les diagonales du quadrilatère  $mm'm''m'''$  passeront par tel ou tel des trois sommets du triangle autopolaire commun aux deux coniques : avec (3), ces diagonales passeront par l'un des deux points conjugués communs situés sur  $Oz$  ; avec (4), ces diagonales  $mm''$  et  $m'm'''$  seront parallèles à  $Ox$ . [Voici un exemple de ce dernier cas : la condition (4) étant en général

$$\frac{2a'}{a} = \frac{c'}{c} + \frac{d'}{d},$$

si l'on suppose  $a = c$ ,  $2a' = c'$ , auquel cas  $S$  et  $S'$  sont des cercles, on doit avoir  $d' = 0$ , c'est-à-dire que  $S'$  doit passer au centre de  $S$ . C'est une configuration bien connue, et les diagonales  $mm''$ ,  $m'm'''$  sont alors parallèles à  $Ox$ . ]

Dès lors, la condition (4) est relative au polyèdre de la figure 2, tandis que (3) se rapporte à celui de la figure 1. Pour ce dernier cas, on a la figure suivante :

Fig. 4.



On doit se représenter les arêtes  $ab, a'b', a''b'', a'''b'''$  perpendiculaires au plan de la figure en  $m, m', m'', m'''$ , milieux de ces arêtes,  $a$  et  $a'$  en avant,  $a''$  et  $a'''$  en arrière; les arêtes  $cd, c'd', c''d'', c'''d'''$  sont de même perpendiculaires au plan de la figure en  $p, p', p'', p'''$ , milieux de ces arêtes,  $c$  et  $c'$  en arrière,  $c''$  et  $c'''$  en avant; les 16 faces du polyèdre sont :

D'une part, les faces latérales des troncs de pyramide de première espèce  $abcd a'b'c'd'$  et  $a''b''c''d'' a'''b'''c'''d'''$ ;

D'autre part, les faces latérales des troncs de pyramide de seconde espèce  $abcd a'''b'''c'''d'''$  et  $a''b''c''d'' a'b'c'd'$ .

Si l'on forme maintenant l'équation en  $\lambda$  relative aux deux quadratiques d'après l'équation

$$\lambda \Sigma + \Sigma' = 0,$$

deux des valeurs de  $\lambda$  ont pour valeur commune

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a'}{a},$$

et les deux autres  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$  sont les valeurs désignées plus haut par  $\lambda'$  et  $\lambda''$ . Les conditions de fermeture deviennent

$$(5) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0$$

pour le polyèdre ( $p = 4, q = 4$ ), et

$$(6) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4$$

pour le polyèdre ( $F = S = 8$ ).

3. Pour le polyèdre de la figure 1, il peut arriver que  $c'', d'', a'', b''$  coïncident avec  $a', b', c', d'$ , et que  $c''', d''', a''', b'''$  coïncident avec  $a, b, c, d$ . On a simplement alors un hexaèdre  $abcd a' b' c' d'$ , et ceci ramène au théorème suivant que j'ai donné autrefois (*Nouvelles Annales*, 1899, p. 72) :

*Si l'on se propose d'obtenir un hexaèdre à intersections coplanaires, ou un octaèdre à diagonales concourantes, circonscrit à une quadrique  $\Sigma$  et inscrit à une quadrique  $\Sigma'$ , le problème, qui parait être doublement indéterminé, n'est possible que si les racines du discriminant de la forme  $\lambda\Sigma + \Sigma'$  vérifient la relation (5), et ce problème est alors simplement indéterminé.*

Ce cas particulier montre l'intérêt qu'il y aurait à résoudre les deux questions suivantes :

*Le polyèdre qui correspond aux valeurs  $p = 4, q = 4$  dépend-il de 32 paramètres, ou de paramètres en nombre supérieur? En obligeant ce polyèdre à être circonscrit à une quadrique  $\Sigma$ , inscrit à une quadrique  $\Sigma'$ , lui impose-t-on 16 + 16 conditions ou un nombre moindre?*

4. Si l'on remplace la quadrique  $\Sigma'$  par une quadrique quelconque du faisceau ponctuel ( $\Sigma, \Sigma'$ ), quadrique ayant pour équation  $m\Sigma + \Sigma' = 0$ , les racines de la nouvelle équation en  $\lambda$  sont celles de l'ancienne équation en  $\lambda$  diminuées de  $m$ , et ces nouvelles racines vérifient encore la relation (6). Donc, si deux quadriques  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  admettent des polyèdres tels que celui de la figure 2 qui soient circonscrits à  $\Sigma$  et inscrits à  $\Sigma'$ , la même chose a lieu quand on remplace la quadrique  $\Sigma'$  par une quadrique du faisceau ponctuel déterminé par  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ . On peut de même remplacer la quadrique  $\Sigma$  par une quadrique du faisceau tangentiel déterminé par  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ .

La condition (6) est celle que j'ai déjà obtenue (*Nouvelles*

*Annales*, 1905) pour deux quadriques  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  telles qu'il existe des contours quadrangulaires situés sur  $\Sigma$  et ayant leurs sommets sur  $\Sigma'$ , des contours quadrangulaires situés sur  $\Sigma'$  et ayant les plans de leurs angles tangents à  $\Sigma$ .

5. Pour deux quadriques  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ , avec des polyèdres réticulés, j'ai établi complètement, dans mon premier Mémoire, la condition

$$(p = 3, q = 3) \quad \sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \dots \pm \dots = 0;$$

je viens d'indiquer les conditions

$$\begin{aligned} (p = 4, q = 4) & \quad -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ (F = S = 8) & \quad -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0. \end{aligned}$$

L'équation en  $\lambda$  étant

$$\delta\lambda^3 + \theta\lambda^2 + \varphi\lambda + \theta'\lambda + \delta' = 0,$$

on a encore

$$\begin{aligned} (p = 3, q = 3) & \quad (\theta^2 - 4\delta\varphi)^2 - 64\delta^2\delta' = 0, \\ (p = 4, q = 4) & \quad \theta^2(\theta^2 - 4\delta\varphi) + 8\delta^2\theta\theta' - 16\delta^2\delta' = 0, \\ (F = S = 8) & \quad \theta(\theta^2 - 4\delta\varphi) + 8\delta^2\theta' = 0; \end{aligned}$$

pour la seconde condition, on écrit que  $\frac{-\theta}{2\delta}$  satisfait à l'équation en  $\lambda$ ; pour la troisième condition, comme on a (avec  $a, b, c, d$  au lieu de  $\lambda_1, \dots$ ),

$$(b + c + d - a)(c + d + a - b) \dots = \Sigma a^4 - 2 \Sigma a^2 b^2 - 8abcd,$$

on a, en changeant  $a$  en  $-a$ ,

$$(b + c + d + a)(c + d - a - b) \dots = \Sigma a^4 - 2 \Sigma a^2 b^2 + 8abcd,$$

de sorte que ce second produit surpasse le premier de  $16abcd$  : il faut dès lors ajouter  $16\delta^2\delta'$  au premier membre de la condition ( $p = 4, q = 4$ ), et diviser par  $\theta$  pour obtenir le premier membre de la condition ( $F = S = 8$ ).

Considérons maintenant la racine carrée du polynôme

$$\delta + \theta t + \varphi t^2 + \theta' t^3 + \delta' t^4,$$

soit

$$A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 + \dots;$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \delta &= A^2, & \theta &= 2AB, & \varphi &= 2AC + B^2, \\ \theta' &= 2AD + 2BC, & \delta' &= 2AE + 2BD + C^2 \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\theta^2 - 4\delta\varphi = -8A^3C;$$

les conditions ci-dessus deviennent en ne tenant pas compte tout d'abord de l'expression de  $\delta'$ ,

$$\begin{aligned} 64A^6C^2 - 64A^6\delta' &= 0, \\ -32A^5B^2C + 32A^5B(AD + BC) - 16A^6\delta' &= 0, \\ -16A^4BC + 16A^4(AD + BC) &= 0, \end{aligned}$$

ou

$$\delta' = C^2, \quad \delta' = 2BD, \quad D = 0;$$

d'après l'expression de  $\delta'$ , on a enfin

$$\begin{aligned} (p = 3, q = 3) \quad AE + BD &= 0, \\ (p = 4, q = 4) \quad 2AE + C^2 &= 0, \\ (F = S = 8) \quad D &= 0. \end{aligned}$$

Ce dernier résultat se rattache à ce que l'on a vu à la fin du n° 4.

---