BULLETIN DE LA S. M. F.

DE SPARRE

Note au sujet de la déviation des graves dans la chute libre

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 146-149

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__146_0>

NOTE AU SUJET DE LA DÉVIATION DES GRAVES DANS LA CHUTE LIBRE;

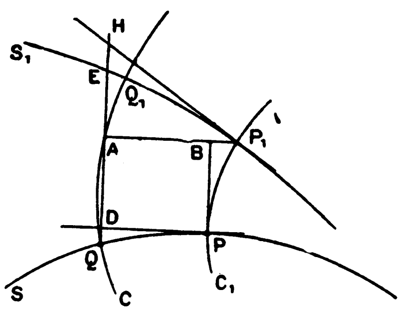
Par M. le Comte DE SPARRE.

J'ai, dans une Note précédente, donné les équations du mouvement relatif à la surface de la Terre supposée sphérique. Dans une Communication, présentée à l'Académie le 23 janvier, M. Maurice Fouché a fait remarquer que, si l'on suppose que la surface de la Terre est une surface de niveau pour la pesanteur, la déviation dans la chute des graves est la même pour la chute dans un puits que pour celle du haut d'une tour, contrairement à ce qui a lieu dans le cas de la Terre supposée sphérique. Le fait est exact, mais M. Fouché a, dans le cours de sa démonstration, commis une erreur sur le sens de la courbure des lignes de force. Je crois donc qu'il ne sera pas sans intérêt de donner une autre démonstration du même fait.

Pour établir la formule que j'ai en vue je me servirai d'une formule due à Bertrand, mais dont je crois utile de donner une démonstration directe, pour mieux faire saisir ce qui a trait au sens de la concavité.

Soit une première série de courbes S, S_1, S_2, ..., et leurs trajectoires orthogonales C, C_1, C_2, ...

Fig. 1.



Considérons deux courbes infiniment voisines de chacun des deux systèmes S, S_1, C, C_1.

Soient Q, Q_1, P, P_1 leurs points de rencontre. Soient, de plus, PD et PB les tangentes en P à S, et C_1P_1, H la tangente en P_1 à S_1,

P_1BA et QDAEH des parallèles menées par P_1 et Q à PD et PB. L'angle de contingence $d\theta$ de la courbe C_1 est égal à AP_1H, de sorte que l'on a

$$d\theta = \frac{AH}{AP_1};$$

de plus, AH étant du second ordre et AP_1 du premier, nous pourrons, dans le calcul de AH, négliger les termes du troisième ordre et ceux du second dans le calcul de P_1A. Nous aurons d'abord, au second ordre près,

$$AP_1 = AB = PD = PQ.$$

Nous avons ensuite

$$AH = QH - QA = QE + EH - QD - DA,$$

E étant le point de rencontre de QH avec S_1. Mais, comme QH fait un angle infiniment petit avec la tangente en Q à C et que de plus il fait aussi un angle infiniment petit avec la normale à S_1 en un point quelconque de l'arc P_1E, on a, au troisième ordre près,

$$QE = QQ_1,$$

et de plus EH diffère d'un infiniment petit du troisième ordre de la distance du point E à la tangente P_1H à S_1 en P_1. Si donc R est le rayon de courbure de S et $R + dR$ celui de S_1, on a, au troisième ordre près,

$$QD = \frac{\overline{PQ}^2}{2R}, \qquad EH = \frac{\overline{P_1E}^2}{2(R+dR)}.$$

Mais on a, au second ordre près,

$$P_1E = P_1A = PQ,$$

et, par suite, au troisième ordre près,

$$QD = EH,$$

d'ailleurs, toujours au troisième ordre près,

$$DA = PB = PP_1,$$

de sorte que l'on a en définitive

$$d\theta = \frac{QQ_1 - PP_1}{QP},$$

et, par suite, pour le rayon de courbure ρ de la ligne C_1,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{QQ_1 - PP_1}{PQ.PP_1},$$

la concavité étant tournée du côté où les lignes S se rapprochent.

Si l'on a maintenant une série de surfaces de niveau qui soient de révolution, la section de ces surfaces par un plan méridien déterminera des courbes de niveau, S, S_1, ..., et les lignes de force C, C_1, ... comprises dans ce plan méridien seront les trajectoires orthogonales des lignes S, S_1, ...

Désignons par ε la distance des deux courbes de niveau infiniment voisines, S et S_1, et par F la valeur de la force en un point Q de S, qui est normale à S; comme le produit

$$F\varepsilon$$

représente le travail lorsqu'on passe de la courbe S à la courbe S_1, ce produit sera constant, et l'on a

$$F\varepsilon = d\alpha.$$

$\varphi(x, z)$ étant la fonction des forces dans le plan méridien considéré,

$$\varphi(x, z) = \alpha$$

est l'équation de S.

On a donc dans le cas actuel

$$QQ_1 = \frac{d\alpha}{F}, \qquad PP_1 = \frac{d\alpha}{F + dF},$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d\alpha}{F} - \dfrac{d\alpha}{F + dF}}{PQ\dfrac{d\alpha}{F + dF}} = \frac{dF}{F.PQ}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{F}\frac{dF}{ds},$$

ds désignant l'arc de la courbe S et $\frac{dF}{ds}$ la dérivée de F par rapport à s lorsqu'on se déplace sur S.

Mais, si R désigne, comme plus haut, le rayon de courbure de S et $d\lambda$ son angle de contingence, on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{RF}\frac{dF}{d\lambda},$$

ce qui est la formule de M. Fouché, mais la démonstration précédente fait voir, sans aucune ambiguïté, que la concavité de la ligne de force est tournée du côté où les lignes de niveau se rapprochent donc du côté *où la force croît*. Il résulte de là qu'à la surface de la Terre la concavité des lignes de force est dirigée *vers le nord*.

Si l'on suppose que la variation de la gravité est exprimée par la formule généralement admise

$$g = g_0 - 0,05 \cos^2\lambda,$$

on aura

$$\frac{dF}{d\lambda} = 0,1 \sin\lambda \cos\lambda,$$

et par suite

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{gR} 0,1 \sin\lambda \cos\lambda\,;$$

de plus, la concavité des lignes de force étant dirigée *vers le nord*, l'effet de l'aplatissement se retranche de celui de la rotation et l'on aura, pour le mouvement en projection sur la tangente au méridien dirigée vers le sud,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \frac{dy}{dt} \sin\lambda - g\frac{z}{\rho},$$

ou, en prenant

$$\frac{dy}{dt} = \omega g t^2 \cos\lambda,$$

$$z = \frac{1}{2} g t^2,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega^2 \sin\lambda \cos\lambda\, g t^2 - g\frac{0,1}{gR} \sin\lambda \cos\lambda \frac{1}{2} g t^2,$$

d'où

$$x = \frac{1}{6} \omega^2 \sin\lambda \cos\lambda\, g t^4 \left(1 - \frac{0,1}{4R\omega^2}\right).$$

Soit, en prenant pour R le rayon moyen de la Terre sensiblement,

$$x = \frac{\omega^2}{23} \sin\lambda \cos\lambda\, g t^4.$$

La valeur donnée par M. Fouché est environ cinq fois plus forte.
