BULLETIN DE LA S. M. F.

G. RÉMOUNDOS

Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 191-201
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__191_0>

SUR LE CAS D'EXCEPTION DE M. PICARD ET LES FONCTIONS MULTIFORMES;

Par M. Georges Rémoundos.

1. Ce travail est le développement d'une Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (20 juin 1904). Dans mon Mémoire, qui a été présenté à la Faculté des Sciences de Paris comme thèse de l'Université, je fais l'étude des zéros des fonctions multiformes en étendant le théorème de M. Picard et ses généralisations à toutes les fonctions ayant un nombre fini de branches, définies par une équation telle que

$$f(z, u) = u^\nu + A_1(z) u^{\nu-1} + A_2(z) u^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu-1}(z) u + A_\nu(z) = 0,$$

les $A_i(z)$ étant des fonctions entières ou bien des fonctions uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé, et à certaines classes de fonctions à un nombre infini de branches (voir *Comptes rendus,* 8 février 1904).

J'ai, à plusieurs reprises, signalé le fait que ces recherches ont pour base un théorème fondamental de la théorie des fonctions, dû à M. Borel. Ce théorème s'énonce comme il suit :

Si les fonctions entières $Q_i(z)$ *croissent moins vite que* $e^{\mu(z)}$, *les exposants* $H_i(z)$ *croissant tous plus vite que* $[\mu(r)]^{1+\alpha}$, *où* α *est un nombre positif quelconque, l'identité*

$$Q_1(z) e^{H_1(z)} + Q_2(z) e^{H_2(z)} + \ldots + Q_n(z) e^{H_n(z)} = 0 \tag{1}$$

entraîne (1) *la nullité de tous les coefficients* $Q_i(z)$.

Dans le cas où les fonctions $Q_i(z)$ et $H_i(z)$ sont d'ordre fini, le théorème de M. Borel est susceptible d'une généralisation, grâce à quelques résultats de MM. Lindelöf (2) et Boutroux (3).

---

(1) Nous supposons que l'identité ne soit pas réductible à une autre de même forme et ayant un nombre moindre d'exponentielles (de termes); en d'autres termes, nous supposons que toutes les différences $H_i(z) - H_k(z)$ jouissent elles-mêmes de la propriété de croître plus vite que $[\mu(r)]^{1+\alpha}$.

(2) *Acta Societatis scientiarum Fennicæ*, t. XXXI, nº 1, 1902.

(3) Thèse *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (Stockholm, Centraltryckeriet).

2. D'après ces auteurs, si le module maximum $M(r)$ d'une fonction entière $F(z)$ satisfait aux inégalités

$$\left\{\begin{array}{l} M(r) < e^{r^{\rho}(\log r)^{\rho_1}(\log_2 r)^{\rho_2}\ldots(\log_\mu r)^{\rho_\mu+\varepsilon}}, \\ M(r) > e^{r^{\rho}(\log r)^{\rho_1}(\log_2 r)^{\rho_2}\ldots(\log_\mu r)^{\rho_\mu-\varepsilon}}, \end{array}\right. \tag{2}$$

la première à partir d'une certaine valeur de r et la seconde pour une infinité de valeurs de r dépassant toute limite donnée, on aura aussi l'inégalité

$$|F(z)| > e^{-r^{\rho}(\log r)^{\rho_1}(\log_2 r)^{\rho_2}\ldots(\log_\mu r)^{\rho_\mu+\varepsilon}}, \tag{3}$$

pour une infinité de valeurs de r de module croissant indéfiniment. C'est le théorème bien connu de M. Hadamard (sur le module minimum) précisé.

Dans son travail publié par l'*Arkiv for Matematik, Astronomi, och Fisik, utgifvet af k. Swenska Vetenskapsakademien*, M. Wiman a précisé le théorème de M. Hadamard d'une autre manière relativement aux *intervalles d'exclusion*. D'après ses résultats, la longueur d'un intervalle d'exclusion commençant par r_0 peut être prise égale à $r_0 V$, V étant un nombre positif, aussi petit que l'on voudra, fixé d'avance.

On en déduit le fait suivant, important pour notre but, à savoir :

Etant donné un nombre quelconque fini de fonctions entières, il y a toujours une infinité de valeurs de r de module croissant indéfiniment, pour lesquelles toutes ces fonctions satisfont à l'inégalité (3).

Dans une Note récente du *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XXXII, 1904, p. 314) nous avons précisé davantage le théorème de M. Hadamard concernant les points d'exclusion, mais sans utiliser la définition d'ordre de $M(r)$ plus précise de MM. Lindelöf et Boutroux.

3. En précisant un résultat de M. Borel, M. Boutroux a pu énoncer un théorème très important sur la croissance de la dérivée d'une fonction entière : il a démontré que, si l'on exclut du champ de la variable certaines aires fermées entourant les pôles, aires dont la somme peut être rendue négligeable, la dérivée logarithmique d'une fonction entière de genre fini est comparable, par-

tout ailleurs, à une puissance finie de la variable (*Thèse,* deuxième Partie).

Il résulte immédiatement de là que, si une fonction $F(z)$ satisfait aux inégalités (2), il en sera de même de sa dérivée $F'(z)$, pourvu que l'on y remplace ε par $\varepsilon_1 < \varepsilon$. En d'autres termes, la dérivée $F'(z)$ a le même ordre $(\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu)$ que la fonction $F(z)$, même lorsqu'on attribue à la notion de l'ordre le sens plus large considéré par M. Lindelöf.

Considérons maintenant un nombre fini de fonctions $F_1(z)$, $F_2(z), \ldots, F_m(z)$ d'ordre $(\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu)$ et une fonction $R(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ rationnelle [1] par rapport à $F_1(z), F_2(z), \ldots, F_m(z)$; il est clair que les résultats ci-dessus indiqués nous conduisent à la conclusion que le module de la fonction

$$\Phi(z) = R[F_1(z), F_2(z), \ldots, F_m(z)]$$

sera compris sur une infinité de cercles de rayons croissant indéfiniment [*cf.* Borel, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica,* t. XX, 1897)], *entre*

$$e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu + \varepsilon}} \quad \text{et} \quad e^{-r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu + \varepsilon}}.$$

Dès lors, il est aisé, en utilisant les résultats exposés plus haut et en suivant exactement le procédé par lequel M. Borel a démontré son théorème, d'établir le théorème suivant :

Si les fonctions $Q_i(z)$ croissent moins vite que

$$e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu}},$$

tandis que les fonctions $H_i(z)$ croissent plus vite que

$$e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu + \alpha}},$$

α étant un nombre positif quelconque, l'identité

$$Q_1(z) e^{H_1(z)} + Q_2(z) e^{H_2(z)} + Q_n(z) e^{H_\nu(z)} = 0 \tag{4}$$

entraîne [2]

$$Q_1(z) = 0, \qquad Q_2(z) = 0, \qquad \ldots, \qquad Q_n(z) = 0.$$

---

(1) D'une façon plus précise, il en serait de même d'une fonction rationnelle des $F_1, F_2, \ldots, F_m$ et de leurs dérivées d'ordre quelconque (en nombre fini).

(2) On suppose toujours qu'aucune des différences $H_i(z) - H_k(z)$ ne soit d'ordre inférieur à $r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu}$. (J'utilise ici la définition d'ordre donnée par M. Lindelöf.)

C'est une généralisation du cas correspondant du théorème de M. Borel; le lecteur est prié de se reporter à son Mémoire précité (p. 385) pour se rendre bien compte des résultats de ce travail.

4. J'exposerai maintenant une extension du théorème de M. Borel, extension poussée assez loin pour permettre de considérer des identités de la forme (1), où les coefficients $Q_i(z)$ et les exposants $H_i(z)$ ne sont plus des fonctions analytiques. A cette extension nous conduisent les résultats remarquables auxquels M. A. Wiman est arrivé par les considérations plus précises du mode de croissance de $M(r)$, dues à MM. Boutroux et Lindelöf : M. Wiman a mis en lumière le cas où les inégalités établies par ces auteurs, entre l'ordre de grandeur du module maximum et la distribution des zéros, ne sont plus vérifiées. C'est un cas d'exception de M. Picard généralisé. M. Wiman a montré que, lorsque ce cas se présente, la fonction entière $F(z)$ se décompose comme il suit :

$$
(5)\qquad
\begin{cases}
F(z) = F_1(z)\, e^{-\frac{z^\rho}{\rho}\left(\sum_{n_1}^{\infty} \frac{1}{a_n^\rho}\right)} & \text{dans le cas} \quad p = \rho - 1,\\[2ex]
F(z) = F_1(z)\, e^{\frac{z^\rho}{\rho}\left(\sum_{1}^{n_1} \frac{1}{a_n^\rho}\right)} & \text{dans le cas} \quad p = \rho,
\end{cases}
$$

p désignant le genre et ρ l'ordre de $F(z)$, le deuxième facteur, qui croît comme une exponentielle, ayant un ordre de grandeur supérieur à celui de $F_1(z)$; j'entends par là que, si le module maximum $M(r)$ de $F(z)$ est de l'ordre $e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu}}$, celui de $F_1(z)$ reste inférieur à $e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu - \alpha}}$, α étant un nombre positif quelconque. Quant à l'entier n_1, qui figure dans les formules (5), il est défini par les inégalités

$$
(6)\qquad r_{n_1} < r < r_{n_1+1},
$$

r étant toujours le module de z et r_n celui du zéro a_n de rang n; on voit bien que le nombre n_1, ainsi défini, est une fonction de $r = |z|$ et qu'il en est de même de la somme $\sum_{n_1}^{\infty} \frac{1}{a_n^\rho}$ que nous désignerons par $q(r)$. Il en résulte que le facteur exponentiel

$$
(7)\qquad \sigma(z) = e^{-q(r) z^\rho}
$$

n'est pas une fonction analytique, puisque la fonction

$$\frac{\rho}{z^\rho}\log \sigma(z) = -q(r)$$

n'est pas une fonction analytique de z, et il en est nécessairement de même de l'autre facteur $F_1(z)$. Comme M. Wiman l'a montré, la fonction $F(z)$ doit être considérée comme exceptionnelle, puisque aucune des fonctions $F(z)+f(z)$, où $f(z)$ désigne une fonction d'ordre inférieur à celui de $F(z)$, ne saurait présenter les mêmes caractères que $F(z)$; nous sommes donc en présence d'un cas d'exception, qui comprend comme cas particulier le cas d'exception usuel et dont le caractère exceptionnel n'a pu se présenter que par une décomposition de la fonction $F(z)$ en deux facteurs non *analytiques* par rapport à z.

5. Supposons maintenant que le plus grand des ordres des coefficients $A_i(z)$, qui figurent dans la fonction $f(z, u)$, soit

$$e^{r^\rho(\log r)^{\rho_1}(\log_2 r)^{\rho_2}\ldots(\log_\mu r)^{\rho_\mu}}. \tag{8}$$

Il est d'abord facile de constater qu'il est impossible d'avoir ν valeurs de u, $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, pour lesquelles la fonction $f(z, u)$ soit d'ordre inférieur à (8), parce que, s'il en était ainsi, il résulterait de la résolution des équations

$$f(z, u_1) = f_1(z), \qquad f(z, u_2) = f_2(z), \qquad \ldots, \qquad f(z, u_\nu) = f_\nu(z), \tag{9}$$

que *tous* les coefficients $A_i(z)$ seraient d'ordre inférieur à (8), ce qui est contradictoire avec notre hypothèse. S'il y a de telles valeurs de u, appelons-les *valeurs exceptionnelles* (E).

Supposons maintenant qu'il y ait $\nu+\rho$ valeurs de u autres que (E), pour lesquelles la fonction $f(z, u)$ soit *exceptionnelle* au sens précis du mot, d'après M. Wiman. Je dis que cela est impossible.

Soient, en effet, $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ ces $\nu+\rho$ valeurs de u; on aura

$$\left\{\begin{aligned} f(z, u_0) &= f_0(z)e^{q_0^{(r)}\frac{z^\rho}{\rho}},\\ f(z, u_1) &= f_1(z)e^{q_1^{(r)}\frac{z^\rho}{\rho}},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f(z, u_\nu) &= f_\nu(z)e^{q_\nu^{(r)}\frac{z^\rho}{\rho}}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

les $f_0(z), f_1(z), \ldots, f_\nu(z)$ désignant des fonctions (non analytiques, en général) d'ordre inférieur à (8) et les q_i désignant les sommes de M. Wiman indiquées plus haut, qui, ne dépendant que de $r = (z)$, sont telles que les facteurs exponentiels soient de l'ordre (8).

Comme M. Wiman l'a démontré dans son travail cité, les fonctions $f_i(z)$ obéissent aux inégalités de MM. Boutroux et Lindelöf et au théorème de M. Hadamard sur le module minimum.

D'autre part, si nous différentions les deux membres de l'égalité

$$(11) \qquad F_i(z) = f(z, u_i) = f_i(z)\, e^{q_i \frac{z^\rho}{\rho}}$$

en faisant varier la variable sur la circonférence de rayon r, nous obtenons

$$(12) \qquad F_i'(z) = e^{q_i \frac{z^\rho}{\rho}} [f_i'(z) + q_i f_i(z) z^{\rho-1}].$$

Or, le rapport $F_i'(z) : F_i(z)$ est comparable [1], d'après les résultats de M. Boutroux, à une puissance finie de z et, par conséquent, $F_i'(z)$ est *exceptionnelle,* au sens de M. Wiman, en même temps que $F_i(z)$.

Il n'y a donc que deux hypothèses possibles pour la fonction

$$(13) \qquad f_i'(z) + q_i f_i(z) z^{\rho-1}:$$

ou bien elle est aussi exceptionnelle [2], ou bien elle est d'ordre moindre que (8). Mais il n'est pas difficile de constater que c'est la seconde hypothèse qui est vraie : si l'on divise, en effet, membre à membre, les deux égalités (11) et (12), on obtient

$$(14) \qquad \frac{F_i'(z)}{F_i(z)} = \frac{f_i'(z)}{f_i(z)} + q_i z^{\rho-1}.$$

Le rapport $F_i'(z) : F_i(z)$ étant comparable à une puissance finie de z (si l'on exclut le voisinage immédiat des zéros), il en est de même de $f_i'(z) : f_i(z)$ et, par conséquent, l'ordre de $f_i'(z)$ n'est

---

(1) Sauf le voisinage immédiat des zéros de $F_i(z)$.

(2) C'est-à-dire susceptible d'une décomposition de M. Wiman ayant un facteur principal de la forme $e^{q(r)\frac{z^\rho}{\rho}}$.

pas supérieur à celui de $f_i(z)$. Il en résulte que la dérivée $F'_i(z)$ a le même facteur *principal* $e^{q_i \frac{z^\rho}{\rho}}$ que la fonction $F_i(z)$. Il est maintenant aisé de prouver que le facteur $f'_i(z) + q_i f_i(z) z^{\rho-1}$ dans la décomposition (12) obéit au théorème de M. Hadamard sur ce module minimum; si l'on effectue, en effet, la décomposition régulière de la fonction exceptionnelle $F'_i(z)$ suivant la méthode de M. Wiman (*voir* le paragraphe **4**; on pourrait l'appeler : *décomposition de M. Wiman*), on obtient

$$F'_i(z) = e^{K_i \frac{z^\rho}{\rho}} \varphi_i(z) \tag{15}$$

avec

$$K_i = -\sum_{n_1}^{\infty} \frac{1}{a'^{\rho}_n} \quad (p = \rho - 1) \qquad \text{ou bien} \qquad K_i = \sum_{1}^{n_1} \frac{1}{a'^{\rho}_n} \quad (p = \rho), \tag{16}$$

les $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots, a'_n, \ldots$ désignant les zéros de $F'_i(z)$ et $\varphi_i(z)$ ayant un ordre inférieur à celui de $e^{K_i \frac{z^\rho}{\rho}}$.

Nous aurons

$$f'_i(z) + q_i f_i(z) z^{\rho-1} = \varphi_i(z) e^{(K_i - q_i)\frac{z^\rho}{\rho}} \quad [1]. \tag{17}$$

Comme nous l'avons dit plus haut, M. Wiman a établi dans son travail cité que la fonction $\varphi_i(z)$, qui n'est pas toujours analytique, obéit au théorème de M. Hadamard sur le module minimum; dès lors, l'égalité (17) nous montre bien clairement qu'il en est de même de la fonction (13).

6. Rien ne nous manque plus pour aller plus loin : l'élimination des coefficients $A_i(z)$ entre les $\nu + 1$ équations (10) nous conduit à l'identité

$$\lambda_0 f_0(z) e^{q_0(r)\frac{z^\rho}{\rho}} + \lambda_1 f_1(z) e^{q_1(r)\frac{z^\rho}{\rho}} + \lambda_2 f_2(z) e^{q_2(r)\frac{z^\rho}{\rho}} + \ldots + \lambda_\nu f_\nu(z) e^{q_\nu(r)\frac{z^\rho}{\rho}} = \lambda, \tag{18}$$

---

[1] Il est clair que la différence $K_i - q_i$ croît moins vite que

$$(\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu - \varepsilon},$$

ε étant un certain nombre positif.

où

$$(19)\quad \lambda_i = \begin{vmatrix} 1 & u_{i+1} & u_{i+1}^2 & \dots & u_{i+1}^{\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_\nu & u_\nu^2 & \dots & u_\nu^{\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_{i-1} & u_{i-1}^2 & \dots & u_{i-1}^{\nu-1} \end{vmatrix}, \qquad \lambda = \begin{vmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & \dots & u_0^\nu \\ 1 & u_1 & u_1^2 & \dots & u_1^\nu \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_\nu & u_\nu^2 & \dots & u_\nu^\nu \end{vmatrix}.$$

Tous ces déterminants de Vandermonde représentent des nombres essentiellement différents de zéro.

Il n'y a rien à changer maintenant à la démonstration de M. Borel pour établir l'impossibilité de (18); nous remarquerons d'abord que, quelles que soient les réductions qui peuvent avoir lieu dans le premier membre de cette identité, le second membre λ restera intact et constituera toujours le terme algébrique unique; d'autre part, ces réductions ne sauraient nuire aux propriétés caractéristiques de l'identité. Si, par exemple, la différence $q_1(r) - q_0(r)$ croît moins vite que $(\log r)^{\rho_1}(\log_2 r)^{\rho_2}\dots(\log_\mu r)^{\rho_\mu - \alpha}$, α étant un nombre positif quelconque, nous aurons

$$(20)\quad \begin{cases} \lambda_0 f_0(z) e^{q_0(r)\frac{z^\rho}{\rho}} + \lambda_1 f_1(z) e^{q_1(r)\frac{z^\rho}{\rho}} = \left[\lambda_0 f_0(z) + \lambda_1 f_1(z) e^{\delta(r)\frac{z^\rho}{\rho}}\right] e^{q_0(r)\frac{z^\rho}{\rho}} = \psi(z) e^{q_0(r)\frac{z^\rho}{\rho}}; \\ \delta(r) = q_1(r) - q_0(r), \qquad \psi(z) = \lambda_0 f_0(z) + \lambda_1 f_1(z) e^{\delta(r)\frac{z^\rho}{\rho}}. \end{cases}$$

Ainsi les deux termes ont été remplacés par un seul de la même forme, puisque $\psi(z)$ croît moins vite que $r^\rho(\log r)^{\rho_1}\dots(\log_\mu r)^{\rho_\mu - b}$, b étant un nombre positif. Par un procédé exposé dans le paragraphe précédent, on démontrera encore que la fonction $\psi(z)$ obéit au théorème de M. Hadamard sur le module minimum. En effet, le produit $\psi(z) e^{q_0(r)\frac{z^\rho}{\rho}}$ désignant une fonction entière *analytique*, on aura la décomposition de M. Wiman :

$$(21)\qquad \psi(z) e^{q_0(r)\frac{z^\rho}{\rho}} = W(z) e^{\theta(r)\frac{z^\rho}{\rho}},$$

où $W(z)$ obéit au théorème de M. Hadamard sur le module minimum. L'ordre de $\psi(z)$ étant inférieur à (8), il est clair que la différence $\theta(r) - q_0(x)$ doit croître moins vite que

$$(\log r)^{\rho_1}(\log_2 r)^{\rho_2}\ldots(\log_\mu r)^{\rho_\mu - \alpha}, \tag{22}$$

α étant positif, et, par conséquent, la fonction $\psi(z)$ sera égale au produit de deux fonctions $W(z)$ et $e^{[\theta(r)-q_0(r)]\frac{z^\rho}{\rho}}$ obéissant au théorème de M. Hadamard sur le module minimum et d'ordre *non supérieur* à celui de $\psi(z)$. Il en sera donc de même de $\psi(z)$.

Nous démontrons aussi, à l'aide du théorème cité plus haut de M. Boutroux, que la dérivée du produit $\psi(z)e^{q_0(r)\frac{z^\rho}{\rho}}$ est une fonction exceptionnelle de la même forme.

Cela acquis, si nous prenons la dérivée de deux membres de l'identité (18), nous obtiendrons une identité *de la même forme avec les mêmes propriétés des coefficients et des exposants*, mais ayant un terme de moins.

Pour les détails de la démonstration, je renvoie au Mémoire précité de M. Borel (p. 385), puisque, au point de vue de la marche de la démonstration, il n'y a rien qui puisse distinguer les identités (18) des identités ordinaires de M. Borel.

Le fait que les coefficients et les exposants ne sont pas des fonctions analytiques n'intervient pas dans la démonstration, car nous avons acquis plus haut les trois éléments nécessaires de la démonstration : 1° la conservation des conditions d'inégalité d'ordre entre les coefficients et les exposants dans les identités déduites de (18) par des dérivations successives ; 2° l'application du théorème sur le module minimum aux coefficients de l'identité (18) ; 3° l'application du même théorème à toutes les identités déduites de (18) par les dérivations successives.

Nous sommes donc en présence d'une forme *singulière*, pour ainsi dire, du théorème généralisé de M. Borel, que nous avons énoncé dans le paragraphe 3.

7. Les considérations précédentes nous conduisent à l'extension au cas d'exception de M. Picard, *généralisé par M. Wiman*, des résultats que nous avons communiqués autrefois à l'Académie [1].

---

[1] Voir *Comptes rendus*, 20 avril 1903, 8 février 1904 et *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1904, p. 44 : *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes*. Ces résultats seront développés en détail dans ma thèse.

sur les fonctions à ν branches d'ordre fini et sur certaines classes de fonctions à un nombre infini de branches. Nous avons ainsi précisé considérablement ces résultats, grâce aux recherches récentes de MM. Boutroux, Lindelöf et Wiman. On a, entre autres, le théorème suivant :

Si nous désignons par $u = \omega(z)$ *la fonction multiforme définie par l'équation* $f(z, u) = 0$ *d'ordre* $e^{r^\rho(\log r)^{\rho_1}\ldots(\log_\mu r)^{\rho_\mu}}$, *les zéros de l'équation*

$$\omega(z) = \alpha \tag{23}$$

(α étant un nombre quelconque) *obéissent aux inégalités établies par MM. Boutroux et Lindelöf pour les fonctions entières du même ordre. Il ne peut pas y avoir d'exception pour plus de* $2\nu - 1$ *valeurs finies de* α. *Il en est de même des équations*

$$\omega(z) = G(z), \tag{24}$$

$G(z)$ *étant une fonction entière d'ordre inférieur à*

$$e^{r^\rho(\log r)^{\rho_1}\ldots(\log_\mu r)^{\rho_\mu}}. \tag{25}$$

Ainsi, si la densité des zéros d'une équation (24) est inférieure à celle d'une fonction entière du même ordre (suivant les inégalités de MM. Boutroux et Lindelöf), cette équation doit être considérée comme exceptionnelle.

Nous appelons ordre de la fonction $\omega(z)$ à ν branches le plus grand des ordres des coefficients $A_i(z)$ de $f(z, u)$. Il est aisé de voir que la fonction $\omega(z)$ ne saurait croître plus vite que

$$e^{r^\rho(\log r)^{\rho_1}\ldots(\log_\mu r)^{\rho_\mu+\alpha}},$$

α étant un nombre positif; car, s'il en était ainsi, l'égalité

$$[\omega(z)]^\nu + A_1(z)[\omega(z)]^{\nu-1} + A_2(z)[\omega(z)]^{\nu-2} + \ldots + A_\nu(z) = 0$$

serait impossible. En effet, le rapport de chaque terme au suivant tend vers l'infini avec un ordre équivalent à celui de $\omega(z)$.

Il est clair aussi qu'une branche, au moins, de $\omega(z)$ sera d'ordre égal à (25), suivant la définition de M. Lindelöf étendue aux fonctions multiformes, car, si toutes les branches étaient d'ordre moindre que (25), il en serait de même de tous les coefficients $A_i(z)$, ce qui est contradictoire à notre hypothèse. Ainsi se trouve justifiée la définition d'*ordre* des fonctions à ν branches donnée ci-dessus.