BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

**Sur le problème de Monge**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 33 (1905), p. 201-210
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__201_1>

## SUR LE PROBLÈME DE MONGE [1];

Par M. E. Goursat.

La publication d'une Note récente de M. Zervos (*Comptes rendus*, 10 avril 1905) a ramené mon attention sur certains résultats, relatifs au problème de Monge, qui, quoique très incomplets, peuvent peut-être offrir quelque intérêt pour les mathématiciens qui s'occupent de ce genre de questions. Je les indiquerai rapidement.

**1.** Il est commode, pour faciliter les raisonnements et les énoncés, d'employer le langage de la Géométrie à $n$ dimensions. Étant données $(n+1)$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, nous dirons que tout système particulier de valeurs de ces variables représente les *coordonnées d'un point* dans l'espace à $(n+1)$ dimensions. Nous continuerons à appeler *surface* toute variété à $n$ dimensions située dans cet espace à $(n+1)$ dimensions, et *courbe* toute variété à *une* dimension. Toute surface est représentée par une seule relation entre les coordonnées de ses points; si cette relation est linéaire, la surface sera appelée *surface plane* ou *plan*. De même, nous appellerons *droite* une variété linéaire à une dimension, c'est-à-dire l'ensemble des points dont les coordonnées $X_i$ satisfont à $n$ relations de la forme

$$\frac{X_1 - x_1}{a_1} = \frac{X_2 - x_2}{a_2} = \ldots = \frac{X_{n+1} - x_{n+1}}{a_{n+1}}; \tag{1}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées d'un point particulier de cette droite, $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ ses *paramètres directeurs*.

---

[1] Cette Note a été présentée à la Société Mathématique, dans la séance du 15 juin 1905. Une Note de M. Bottasso, sur le même sujet, a été présentée à l'Académie des Sciences dans la séance du 13 juin 1905.

Un plan P passant par un point de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$

$$(2) \qquad A_1(X_1 - x_1) + A_2(X_2 - x_2) + \ldots + A_{n+1}(X_{n+1} - x_{n+1}) = 0$$

est, en général, déterminé, s'il doit contenir $n$ droites passant par ce point $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$; car les coefficients $A_i$ doivent vérifier un système de $n$ équations linéaires et homogènes.

Une droite D, passant par un point fixe M de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, et dont les paramètres directeurs dépendent de $p$ variables arbitraires $\alpha_i (p < n)$, engendre une *variété conique* de sommet M. Si $p = 1$, nous dirons que cette variété conique à deux dimensions est un *cône* de sommet M. Tout cône de sommet M est, d'après cela, représenté par un système de $(n - 1)$ équations distinctes

$$(3) \qquad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; X_1 - x_1, \ldots, X_{n+1} - x_{n+1}) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n - 1),$$

les $f_i$ étant des fonctions homogènes des différences $X_i - x_i$. Si, dans les équations (1), les paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ sont fonctions d'une seule variable indépendante $\alpha$, ces droites sont les *génératrices* d'un cône de sommet $M(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, et à chaque valeur de $\alpha$ correspond une génératrice déterminée.

Étant donné un cône de sommet M, tout plan passant par M renferme un certain nombre de génératrices. Si, par exemple, les génératrices du cône sont représentées par les équations (1), $a_1$, $a_2, \ldots, a_{n+1}$ étant fonctions d'une variable indépendante $\alpha$, les valeurs de $\alpha$ correspondant aux génératrices situées dans le plan (2) sont racines de l'équation

$$(4) \qquad U(\alpha) = A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_{n+1} a_{n+1} = 0.$$

On peut disposer des coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ de façon que ce plan ait en commun avec le cône $n$ génératrices confondues avec une génératrice déterminée. Si $\alpha_0$ est la valeur correspondante de la variable $\alpha$, il faut et il suffit pour cela que $\alpha_0$ soit une racine multiple d'ordre $n$ de l'équation $U(\alpha) = 0$; on a ainsi $n$ équations de condition

$$(5) \qquad U(\alpha_0) = 0, \qquad U'(\alpha_0) = 0, \qquad \ldots, \qquad U^{(n-1)}(\alpha_0) = 0,$$

qui déterminent, en général, les rapports des coefficients $A_1$,

$A_2, \ldots, A_{n+1}$. Nous dirons que le plan ainsi obtenu est *osculateur* au cône (T) suivant la génératrice $(\alpha_0)$. En éliminant $\alpha_0$ entre les $n$ équations (5), on arrive, en général, à $(n-1)$ équations de condition homogènes par rapport à $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$,

$$(6) \qquad F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

dépendant, en outre, des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, si les paramètres directeurs $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ dépendent non seulement de $\alpha$, mais des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ du sommet. Nous dirons, pour abréger, que les relations (6) sont les *équations tangentielles* du cône considéré de sommet $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$.

Lorsque le cône est représenté par un système de $n-1$ équations de la forme (3), les $n$ équations (2) et (3) déterminent les génératrices du cône situées dans le plan P. On obtiendra encore les équations tangentielles du cône en exprimant que $n$ de ces génératrices sont confondues. Par exemple, en éliminant $n-1$ des rapports $\frac{X_2 - x_2}{X_1 - x_1}, \ldots, \frac{X_{n+1} - x_{n+1}}{X_1 - x_1}$ entre les $n$ relations (2) et (3), on arrive à une équation pour déterminer le dernier rapport, et cette équation devra avoir une racine multiple d'ordre $n$.

**2.** Réciproquement, tout système de $n-1$ équations de la forme (6), homogènes par rapport à $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, peut être considéré comme représentant les équations tangentielles d'un cône de sommet $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$.

En effet, imaginons que des $(n-1)$ équations (6) on ait tiré les valeurs de $(n-1)$ des rapports $\frac{A_2}{A_1}, \ldots, \frac{A_{n+1}}{A_1}$, en fonction de l'un d'eux $\alpha$. Le plan P représenté par l'équation (2)

$$U(\alpha) = A_1(X_1 - x_1) + \ldots + A_{n+1}(X_{n+1} - x_{n+1}) = 0$$

ne dépend plus que d'un paramètre variable $\alpha$. Les $n$ équations

$$(7) \qquad U(\alpha) = 0, \qquad U'(\alpha) = 0, \qquad \ldots, \qquad U^{(n-1)}(\alpha) = 0$$

représentent, quand on donne à $\alpha$ une valeur particulière, une droite D passant par le point M $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$. Lorsque $\alpha$ varie, cette droite D engendre un cône de sommet M, et, d'après la façon même dont on l'a obtenu, il est clair que le plan P a $n$ génératrices communes avec ce cône qui sont confondues avec la génératrice ($\alpha$). En éliminant $\alpha$ entre les $(n-1)$ équations (7), on aura donc les équations d'un cône de sommet M dont les équations (6) sont les équations tangentielles.

3. Considérons maintenant un système de $k$ équations de Monge ($k \leqq n-1$),

$$(8)\quad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

les $f_i$ étant des fonctions homogènes par rapport à $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. Le problème de l'intégration de ce système consiste à exprimer $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ explicitement en fonction d'une variable auxiliaire $t$, de $n-k$ fonctions arbitraires de ce paramètre et de leurs dérivées successives jusqu'à un ordre déterminé. Ce problème a été résolu par Monge dans le cas particulier où l'on a $n = 2$, $k = 1$. Nous allons examiner le cas où l'on a, $n$ étant quelconque, $k = n - 1$.

Si, dans les $(n-1)$ équations (8), on remplace $dx_i$ par $X_i - x_i$, on a les équations d'un cône de sommet $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$. A chaque point de l'espace à $(n+1)$ dimensions les équations proposées font correspondre un cône (T) ayant son sommet en ce point, et le problème de Monge peut encore être formulé en ces termes :

*Déterminer les courbes de l'espace à $n+1$ dimensions qui sont tangentes en chacun de leurs points à l'une des génératrices du cône* (T) *ayant ce point pour sommet.*

Écrivons l'équation d'un plan passant par le point $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ sous la forme

$$(9)\quad X_{n+1} - x_{n+1} = p_1(X_1 - x_1) + \ldots + p_n(X_n - x_n);$$

les équations tangentielles du cône (T) de sommet $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ sont alors de la forme

$$(10)\quad F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si l'on considère $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme $n$ variables indépendantes, $x_{n+1}$ comme une fonction de ces $n$ variables, et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ comme les dérivées partielles de $x_{n+1}$ $\left(p_i = \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_i}\right)$, les relations (10) forment un système de $(n-1)$ équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue. A tout système de $(n-1)$ équations de Monge

$$(9') \qquad f_i(x_1, x_2, \ldots x_{n+1}; dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

correspond ainsi un système (10) de $(n-1)$ équations aux dérivées partielles simultanées du premier ordre, que nous appellerons le *système associé* du premier système (9).

4. Cela posé, il est facile de montrer que la méthode de Monge s'étend sans peine au cas où le système associé d'équations aux dérivées partielles (10) est *en involution*.

Soit, en effet,

$$(11) \qquad V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; a, b) = 0$$

une intégrale complète de ce système. Le plan tangent à l'une des surfaces intégrales S passant en un point donné $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ a pour équation

$$(12) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_1}(X_1 - x_1) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(X_{n+1} - x_{n+1}) = 0,$$

les deux paramètres $a$ et $b$ étant liés par la relation (11). Ce plan ne dépend donc, en réalité, que d'un seul paramètre variable, et, d'après la façon dont on a déduit le système adjoint (10) du système (9'), le plan représenté par l'équation (12) reste osculateur au cône (T) de sommet $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ représenté par les équations

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_i(x_1, \ldots, x_{n+1}; X_1 - x_1, X_2 - x_2, \ldots, X_{n+1} - x_{n+1}) = 0, \\ \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{array} \right.$$

Pour déduire les équations (13) de l'intégrale complète (11), on pourrait donc procéder comme il suit. Regardons, pour fixer les idées, $a$ comme un paramètre variable et $b$ comme une fonction de ce paramètre définie par la relation (11). Les dérivées successives

$$b' = \frac{db}{da}, \qquad b'' = \frac{d^2 b}{da^2}, \qquad \ldots, \qquad b^{(n-1)} = \frac{d^{n-1} b}{da^{n-1}}, \qquad b^{(n)} = \frac{d^n b}{da^n}$$

sont déterminées par les relations

$$(14)\qquad \begin{cases} V_1 = \dfrac{\partial V}{\partial a} + \dfrac{\partial V}{\partial b} b' = 0, \\ V_2 = \dfrac{\partial^2 V}{\partial a^2} + 2\dfrac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b} b' + \dfrac{\partial^2 V}{\partial b^2} b'^2 + \dfrac{\partial V}{\partial b} b'' = 0, \\ \dotfill, \\ V_n = \dfrac{\partial^n V}{\partial a^n} + \ldots + \dfrac{\partial V}{\partial b} b^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Les équations obtenues en différentiant $(n-1)$ fois successivement l'équation (12) par rapport au paramètre $a$, $b$ étant supposée remplacée par son expression tirée de la relation (11), peuvent alors s'écrire

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1}(X_1 - x_1) + \ldots + \dfrac{\partial V_1}{\partial x_{n+1}}(X_{n+1} - x_{n+1}) = 0, \\ \dotfill, \\ \dfrac{\partial V_{n-1}}{\partial x_1}(X_1 - x_1) + \ldots + \dfrac{\partial V_{n-1}}{\partial x_{n+1}}(X_{n+1} - x_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

et l'on obtiendra les équations (13) en éliminant $a$, $b$, $b'$, $b''$, ..., $b^{(n-1)}$ entre les $2n$ équations (11), (12), (14) et (15).

Supposons maintenant que l'on pose

$$b = \varphi(a),$$

la fonction $\varphi(a)$ étant une fonction arbitraire de $a$, et considérons le système de $n-1$ équations

$$(16)\qquad V = 0, \qquad \frac{dV}{da} = 0, \qquad \frac{d^2 V}{da^2} = 0, \qquad \frac{d^n V}{da^n} = 0,$$

où l'on a posé

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{dV}{da} = \dfrac{dV}{da} + \dfrac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a), \\ \dfrac{d^2 V}{da^2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial a^2} + 2\dfrac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b}\varphi'(a) + \dfrac{\partial^2 V}{\partial b^2}\varphi'^2(a) + \dfrac{\partial V}{\partial b}\varphi''(a), \\ \dotfill, \\ \dfrac{d^n V}{da^n} = \dfrac{\partial^n V}{\partial a^n} + \ldots + \dfrac{\partial V}{\partial b}\varphi^{(n)}(a). \end{cases}$$

Ces $(n+1)$ équations simultanées permettent en général d'exprimer $x_1$, $x_2$, ..., $x_{n+1}$ en fonction de la variable auxiliaire $a$, de

$\varphi(a), \varphi'(a), \ldots, \varphi^{(n)}(a)$. Je dis que la courbe de l'espace à $(n+1)$ dimensions ainsi déterminée est une *intégrale* du système de Monge. En effet, si nous appelons $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}$ les dérivées de ces fonctions par rapport à $a$, on déduit des équations (16)

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} x'_1 + \ldots + \dfrac{\partial V}{\partial x_{n+1}} x'_{n+1} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{dV}{da}\right) x'_1 + \ldots + \dfrac{\partial\left(\dfrac{dV}{da}\right)}{\partial x_{n+1}} x'_{n+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial\left(\dfrac{d^{n-1}V}{da^{n-1}}\right)}{\partial x_1} x'_1 + \ldots + \dfrac{\partial\left(\dfrac{d^{n+1}V}{da^{n-1}}\right)}{\partial x_{n+1}} x'_{n+1} = 0, \end{cases}$$

et le système des $2n+1$ équations (16) et (18) devient identique au système formé des équations (11), (12), (14) et (15), pourvu qu'on remplace $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}$ par $X_1 - x_1, X_2 - x_2, \ldots, X_n - x_n$ respectivement, puis $\varphi(a)$ par $b$, $\varphi'(a)$ par $b'$, ..., $\varphi^{(n)}(a)$ par $b^{(n)}$. Par suite, l'élimination de $a, \varphi(a), \varphi'(a), \ldots, \varphi^{(n)}(a)$ entre les équations (16) et (18) conduira aux relations

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; x'_1, \ldots, x'_{n+1}) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

identiques aux relations (9). Les formules (16) représentent donc l'intégrale générale du système de Monge proposé.

5. Les systèmes précédents sont évidemment très particuliers; mais on peut quelquefois étendre la méthode à des systèmes de Monge plus généraux, en imitant la méthode d'intégration de Lagrange et Charpit pour une équation aux dérivées partielles. Étant donné, par exemple, un système de $n-k$ équations de Monge $(k > 1)$, pour appliquer la méthode précédente il suffira de pouvoir lui adjoindre $k-1$ équations nouvelles de même forme, de façon que le système associé du système ainsi complété soit en involution.

Considérons, par exemple, un système de Monge de la forme

$$(19)\qquad f_i(dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-k,$$

les fonctions $f_i$ ne renfermant pas les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Si $k = 1$, le système associé est de la forme

$$F_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{20}$$

et par conséquent est en involution. Si $k$ est $> 1$, il suffira d'ajouter aux équations (19) $k-1$ équations de même forme, par exemple

$$\frac{dx_3}{dx_1} = \psi_1\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right), \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_{k+1}}{dx_1} = \psi_{k-1}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right),$$

les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{k-1}$ étant arbitraires, pour être ramené au premier cas.

Les systèmes (19) ont été considérés par M. Darboux (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1887). La méthode précédente montre comment on peut rattacher l'intégration de ces systèmes à une théorie générale, tout à fait analogue à la théorie de Monge pour l'équation à trois variables.

**6.** Appliquons, par exemple, cette méthode à l'équation de Serret

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_4^2. \tag{21}$$

Joignons à cette équation une relation de forme arbitraire

$$\frac{dx_3}{dx_1} = \varphi\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right). \tag{22}$$

Les équations (21) et (22) forment un système de Monge, et les équations du cône (T) correspondant de sommet $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sont

$$\left\{\begin{aligned} &(X_4 - x_4)^2 = (X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + (X_3 - x_3)^2, \\ &\frac{X_3 - x_3}{X_1 - x_1} = \varphi\left(\frac{X_2 - x_2}{X_1 - x_1}\right). \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Pour obtenir le système associé correspondant, formons l'équation qui donne les génératrices communes au cône (T) et au plan

$$X_4 - x_4 = p_1(X_1 - x_1) + p_2(X_2 - x_2) + p_3(X_3 - x_3);$$

on peut poser

$$\frac{X_2 - x_2}{X_1 - x_1} = \alpha, \qquad \frac{X_3 - x_3}{X_1 - x_1} = \varphi(\alpha).$$

ce qui donne

$$\frac{X_4 - x_4}{X_1 - x_1} = p_1 + p_2\alpha + p_3\varphi(\alpha).$$

L'équation en $\alpha$ est alors

$$[p_1 + p_2\alpha + p_3\varphi(\alpha)]^2 = 1 + \alpha^2 + \varphi^2(\alpha),$$

ou

$$(24) \qquad p_1 + p_2\alpha + p_3\varphi(\alpha) = \sqrt{1 + \alpha^2 + \varphi^2(\alpha)} = U(\alpha).$$

D'après la théorie générale, on aurait les équations du système associé d'équations aux dérivées partielles en éliminant $\alpha$ entre la relation (24) et les relations (25)

$$(25) \qquad \begin{cases} p_2 + p_3\varphi'(\alpha) = U'(\alpha), \\ \quad\;\; p_3\varphi''(\alpha) = U''(\alpha). \end{cases}$$

Il est inutile d'effectuer cette élimination, car on aura une intégrale complète de ce système en prenant le plan

$$X_4 = p_1X_1 + p_2X_2 + p_3X_3 + b,$$

$p_1$, $p_2$, $p_3$ étant remplacées par leurs expressions tirées des formules (24) et (25), $\alpha$ et $b$ étant des constantes arbitraires.

Remplaçons maintenant $b$ par une seconde fonction arbitraire $\psi(\alpha)$; d'après le théorème général, les fonctions $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ du paramètre $\alpha$ définies par les quatre équations

$$(26) \qquad \begin{cases} x_4 = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \psi(\alpha), \\ 0 = p'_1x_1 + p'_2x_2 + p'_3x_3 + \psi'(\alpha), \\ 0 = p''_1x_1 + p''_2x_2 + p''_3x_3 + \psi''(\alpha), \\ 0 = p'''_1x_1 + p'''_2x_2 + p'''_3x_3 + \psi'''(\alpha), \end{cases}$$

$p'_i$, $p''_i$, $p'''_i$ étant les dérivées de $p_i$ par rapport à $\alpha$, doivent satisfaire à la relation proposée (21).

Il est facile de le vérifier. On déduit en effet des relations (24) et (25) que l'on a

$$(27) \qquad \begin{cases} p_1 + p_2\alpha + p_3\varphi(\alpha) = U(\alpha), \\ p'_1 + p'_2\alpha + p'_3\varphi(\alpha) = 0, \\ p''_1 + p''_2\alpha + p''_3\varphi(\alpha) = 0. \end{cases}$$

D'un autre côté, en différentiant les relations (26), il vient

$$(28)\quad \begin{cases} dx_4 = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + p_3\,dx_3, \\ 0 = p'_1\,dx_1 + p'_2\,dx_2 + p'_3\,dx_3, \\ 0 = p''_1\,dx_1 + p''_2\,dx_2 + p''_3\,dx_3. \end{cases}$$

Les relations (27) et (28) prouvent que l'on doit avoir

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{\alpha} = \frac{dx_3}{\varphi(\alpha)} = \frac{dx_4}{U(\alpha)},$$

et comme l'on a

$$U^2(\alpha) = 1 + \alpha^2 + \varphi^2(\alpha),$$

il s'ensuit que l'on a aussi

$$dx_4^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$