BULLETIN DE LA S. M. F.

F. LUCAS

Sur la généralisation du rapport anharmonique

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 225-229

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__225_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA GÉNÉRALISATION DU RAPPORT ANHARMONIQUE;

Par M. Félix Lucas.

Dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 22 décembre 1873, j'ai indiqué que la notion du rapport anharmonique de quatre points en ligne droite peut s'étendre, de la manière suivante, au rapport anharmonique de quatre points quelconques du plan.

Désignons par z_1, z_2, z_3, z_4 les coordonnées affixes (de la forme $x+y\sqrt{-1}$) de ces quatre points relativement à un système quelconque d'axes rectangulaires et distinguons les deux groupes z_1, z_2 et z_3, z_4. Le rapport anharmonique sera

$$\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}:\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}.$$

Il est indépendant du système d'axes rectangulaires adopté, car si l'on place une nouvelle origine au point α, β en faisant tourner d'un angle ω la direction des axes, la nouvelle valeur z' de l'affixe z d'un point quelconque est liée explicitement à celle-ci par la formule

$$z = z'e^{\omega\sqrt{-1}}+\alpha+\beta\sqrt{-1}.$$

Le rapport anharmonique de deux couples de points n'appartenant pas à une même ligne droite est, par conséquent, fonction seulement de la figure formée par ces quatre points.

On démontre aisément que, *pour que ce rapport soit réel, il est nécessaire et suffisant que les quatre points constituent les sommets d'un quadrilatère inscriptible.*

Pour que ce rapport prenne la valeur -1 (cas dans lequel il reçoit le nom de *rapport harmonique*), il faut et il suffit que les cordes 1, 2 et 3, 4 soient les diagonales d'un quadrilatère inscriptible et représentent deux *droites conjuguées,* c'est-à-dire que chacune d'elles doit contenir le pôle de l'autre relativement au cercle circonscrit.

Avec les systèmes de points en ligne droite et les systèmes de droites convergentes, on peut obtenir des *figures corrélatives.* La notion du rapport anharmonique de quatre points en ligne droite conduit à la notion corrélative du rapport anharmonique de quatre droites convergentes. Désignons par A, B et C, D les deux couples de droites; on sait que leur rapport anharmonique est représenté par l'expression

$$\frac{\sin\widehat{AC}}{\sin\widehat{AD}}:\frac{\sin\widehat{BC}}{\sin\widehat{BD}}.$$

Il nous paraît intéressant de rechercher si l'on peut attribuer un rapport anharmonique à quatre droites non convergentes, formant deux couples que nous désignerons par les indices 1, 2 et 3, 4.

Décrivons dans le plan une circonférence quelconque et prenons les pôles de nos droites relativement à cette courbe. Comme le rapport anharmonique de ces quatre pôles est indépendant du système d'axes rectangulaires adopté, nous pouvons, pour calculer ce rapport, placer notre origine des coordonnées au centre de la circonférence considérée. Prenons l'équation de cette circonférence

$$X^2 + Y^2 = R^2$$

et celle de la première droite

$$a_1 X + b_1 Y = c_1 ;$$

la coordonnée affixe du pôle de cette droite est

$$z_1 = R^2 \frac{a_1 + b_1\sqrt{-1}}{c_1}.$$

Il est à remarquer que les *coordonnées tangentielles* de la droite, relativement à nos axes rectangulaires, sont

$$R^2 \frac{a_1}{c_1} \quad \text{et} \quad R^2 \frac{b_1}{c_1};$$

par conséquent, *l'affixe cartésien du pôle de la droite ne diffère pas de l'affixe tangentiel de cette droite lorsque l'origine des coordonnées est au centre de la circonférence considérée.* Il n'en est plus ainsi lorsque l'origine n'est pas au centre du cercle.

Les valeurs des affixes z_1, z_2 et z_3, z_4 montrent que : *Le rapport anharmonique des pôles de quatre droites relativement à une circonférence est indépendant du rayon de cette courbe.*

Mais ce rapport anharmonique dépend de la position du centre de la circonférence relativement à laquelle on prend les pôles des quatre droites données. Transportons, en effet, la circonférence parallèlement à elle-même de manière que son centre vienne occuper le point quelconque α, β et prenons ce nouveau centre pour origine des coordonnées. L'équation de la droite deviendra

$$a_1 X + b_1 Y = - a_1 \alpha - b_1 \beta + c,$$

et l'affixe de son pôle sera

$$z_1 = R^2 \frac{a_1 + b_1\sqrt{-1}}{-a_1\alpha - b_1\beta + c};$$

par conséquent le rapport anharmonique des affixes des quatre pôles dépendra de α et de β.

Il est clair que nous n'arrivons pas ainsi à généraliser complètement la notion du rapport anharmonique de quatre droites non convergentes. Nous devons nous contenter d'examiner le cas particulièrement intéressant où les quatre pôles des droites considérées ont un rapport anharmonique réel, c'est-à-dire le cas où ces quatre pôles sont les sommets d'un quadrilatère inscriptible.

A cet effet, considérons quatre droites tangentes à une même circonférence et désignons par T_1, T_2 et T_3, T_4 ces deux couples de tangentes. Leurs pôles relativement à la circonférence inscrite ne diffèrent pas de leurs points de contact, dont nous pouvons désigner les affixes par z_1, z_2 et z_3, z_4. Il suffit de construire la figure pour apercevoir la relation

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{\sin\frac{1}{2}\widehat{T_1 T_3}}{\sin\frac{1}{2}\widehat{T_2 T_3}} : \frac{\sin\frac{1}{2}\widehat{T_1 T_4}}{\sin\frac{1}{2}\widehat{T_2 T_4}}.$$

Il est clair que le second membre de cette égalité est exclusivement fonction de la figure formée par nos quatre tangentes. Il est égal au rapport anharmonique des quatre droites convergentes que l'on obtient en joignant un point quelconque de la circonférence aux quatre points de contact. On sait, d'ailleurs, que ce dernier rapport est égal au rapport anharmonique des quatre points d'intersection de nos quatre tangentes avec une cinquième tangente quelconque à la circonférence, rapport auquel M. Chasles a donné le nom de *rapport anharmonique des quatre tangentes*.

Les diverses considérations que nous avons exposées dans cette Note nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

Le rapport anharmonique de quatre droites tangentes à une circonférence est égal :

D'une part, au rapport anharmonique des pôles de ces quatre *droites relativement à une circonférence quelconque concentrique avec la circonférence inscrite,*

Et, d'autre part, au rapport anharmonique des affixes tangentiels de ces quatre droites relativement à un système quelconque d'axes rectangulaires ayant pour origine le centre de la circonférence inscrite.

Pour que les quatre droites tangentes à une même circonférence soient en rapport harmonique, il faut et il suffit que les points d'intersection ou sommets de chacun des couples T_1, T_2 et T_3, T_4 soient deux *points conjugués* relativement à la circonférence, ou, en d'autres termes, que la polaire de chacun d'eux passe par l'autre.