BULLETIN DE LA S. M. F.

R. DE MONTESSUS

La résolution numérique des équations

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 26-33

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__26_0>

LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS;

Par M. R. DE MONTESSUS.

Hoéné Wronski ([1]) a fondé la réduction numérique des équations *algébriques* sur les fonctions *aleph*. Ces fonctions sont un cas particulier de fonctions plus générales, permettant de résoudre, comme celles-ci, la question posée.

Qui plus est, ces fonctions générales donnent la solution des équations numériques *transcendantes,* au lieu que les fonctions *aleph* n'y sauraient prétendre.

Je vais brièvement exposer la méthode de résolution des équations numériques, telle qu'elle résulte de travaux récents ([2]), et comparer les résultats de cette méthode avec ceux que H. Wronski avait énoncés *quatre-vingt-dix ans* plus tôt.

Je suppose que l'équation à étudier ne possède que des racines simples. *Deux cas sont à distinguer.*

I. *Les modules des deux racines les plus proches du point* $z = 0$ *sont différents l'un de l'autre.*

Soit

$$F(z) = 0$$

l'équation proposée et soit α_1 la racine de moindre module. Si $\Phi(z)$ est une fonction assujettie aux seules conditions : 1° de n'avoir aucun pôle dans le cercle de rayon $|\alpha_1|$; 2° que la fonction

$$\frac{\Phi(z)}{F(z)}$$

soit développable en série de puissances entières

$$s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

on sait que *le rapport* $\frac{s_p}{s_{p+1}}$ *tendra, p croissant indéfiniment, vers la racine* α ([3]).

([1]) H. WRONSKI, *Résolution générale des équations de tous les degrés* (*Messianisme,* t. III).

([2]) HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, p. 90.

([3]) HADAMARD, *loc. cit.*, p. 38.

Si $F(z)$ est un polynome, on pourra prendre pour $\Phi(z)$ un polynome quelconque. On déterminera alors la série (1) en identifiant les termes de l'identité

$$\Phi(z) = F(z) \times (s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \ldots).$$

On vérifiera *sans peine* que, si

$$F(z) = z^m - A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} - \ldots + (-1)^m A_m,$$

les coefficients s_m sont déterminés de la manière suivante :

1° Les premiers $s_0, s_1, \ldots, s_p$ dépendent du polynome $\Phi(z)$, c'est-à-dire, pour l'objet qui nous préoccupe, sont *arbitraires; on peut prendre arbitrairement, quel que soit le nombre fini p, les coefficients $s_0, s_1, \ldots, s_p$.*

2° Les coefficients $s_{p+1}, s_{p+2}, \ldots$ vérifient la loi de récurrence

$$(2)\quad -A_m s_n + A_{m-1} s_{n-1} + \ldots + (-1)^m A_1 s_{n-(m-1)} + (-1)^{m+1} s_{n-m} = 0 \qquad (n < p).$$

Semblablement, le calcul de la racine de plus grand module, *à la supposer seule de ce module,* peut se faire comme il suit :

Faisant sur l'équation la transformation $z = \frac{1}{Z}$, on est ramené au cas précédent.

Si

$$\sigma_0 + \sigma_1 Z + \sigma_2 Z^2 + \ldots$$

est le développement en série de la fonction

$$\frac{\Phi_1(Z)}{F_1(Z)},$$

où $F_1(Z) = 0$ est la transformée de $F(z) = 0$ par la substitution $z = \frac{1}{Z}$,

$$\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}$$

tend vers la racine en question.

Ici les fonctions σ vérifient la loi de récurrence

$$(3)\qquad \sigma_n - A_1 \sigma_{n-1} + A_2 \sigma_{n-2} - \ldots + (-1)^m A_m \sigma_{n-m} = 0.$$

J. Bernoulli connaissait ce procédé de calcul des racines de plus petit et plus grand module *dans le cas où l'équation est algébrique.*

Wronski de même. Ce dernier emploie à cet effet les fonctions *aleph.* Les fonctions *aleph positives* correspondent aux fonctions σ et sont définies par les conditions

$$\begin{aligned}
&\textit{Aleph de zéro} = \aleph(0) = \aleph(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^0 = (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)^0 = 1,\\
&\textit{Aleph de un} \quad = \aleph(1) = \aleph(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^1 = (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)^1 = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m,\\
&\textit{Aleph de deux} = \aleph(2) = \aleph(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^2 = (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)^2_1 = \Sigma\alpha_1^2+\Sigma\alpha_1\alpha_2,\\
&\textit{Aleph de trois} = \aleph(3) = \aleph(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^3 = (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)^3_1 = \Sigma\alpha_1^3+\Sigma\alpha_1^2\alpha_2+\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3,
\end{aligned}$$

où le symbole $(\ )_1$ indique que, dans le développement de

$$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)^p,$$

on doit remplacer tous les facteurs p, $\frac{p(p-1)}{1.2}$, $\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}$, ... par l'unité.

Les fonctions $\aleph$ vérifient les relations de récurrence (3) et la limite de $\frac{\aleph(p+1)}{\aleph(p)}$, quand p croît indéfiniment, n'est autre que la racine de plus grand module de l'équation, *si toutes les autres racines ont des modules moindres.*

Le calcul de la racine de moindre module, à supposer que toutes les autres racines soient plus grandes en modules, se fait de même par les fonctions *aleph négatives,* définies comme il suit :

$$\begin{aligned}
&\aleph(-1) = \aleph(-2) = \aleph(-3) = \ldots = \aleph[-(m-1)] = 0,\\
&-A_m\,\aleph[-(n+m)] + A_{m-1}\,\aleph[-(n+m-1)]\\
&\qquad - A_{m-2}\,\aleph[-(n+m-2)] + \ldots\\
&\qquad + (-1)^{m-2}\,\aleph[-(n+1)] + (-1)^{m-1}\,\aleph(-n) = 0,
\end{aligned}$$

ce qui n'est autre que la relation de récurrence (2).

II. *Les modules des deux racines les plus proches de l'origine sont identiques.*

Si les modules des racines de l'équation, algébrique ou non, vérifient les inégalités

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| < |\alpha_3| \leqq |\alpha_4| \leqq \ldots,$$

on peut former l'équation du second degré admettant les racines α_1, α_2, sous condition qu'il existe une fonction $\Phi(z)$ n'ayant aucun pôle dans le cercle de rayon $|\alpha_2|$ et telle que la fonction

$$\frac{\Phi(z)}{F(z)}$$

soit développable en série suivant les puissances entières de la variable z. En effet, on peut écrire

$$\frac{\Phi(z)}{F(z)} = \frac{A}{\alpha_1 - z} + \frac{B}{\alpha_2 - z} + \frac{\Phi_1(z)}{F_1(z)} \quad \text{où} \quad F_1(z) = \frac{F(z)}{(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z)},$$

$$\frac{A}{\alpha_1 - z} = \frac{A}{\alpha_1} + \frac{Az}{\alpha_1^2} + \frac{Az^2}{\alpha_1^3} + \ldots + \frac{Az^{n-1}}{\alpha_1^n} + \ldots,$$

$$\frac{B}{\alpha_2 - z} = \frac{B}{\alpha_2} + \frac{Bz}{\alpha_2^2} + \frac{Bz^2}{\alpha_3^2} + \ldots + \frac{Bz^{n-1}}{\alpha_2^n} + \ldots,$$

$$(4) \qquad \frac{\Phi(z)}{F(z)} = s'_0 + s'_1 z + s'_2 z^2 + \ldots + s'_n z^n + \ldots,$$

et si

$$\frac{\Phi_1(z)}{F_1(z)} = s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \ldots + s_n z^n + \ldots :$$

1°

$$s_n = \frac{A}{\alpha_1^{n+1}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+1}} + s'_n;$$

2° Les quantités $\alpha_1^n s'_n$, $\alpha_2^n s'_n$ tendent vers zéro quand n croît indéfiniment.

Car la série (4) converge par hypothèse dans un cercle de rayon $> |\alpha_2|$, puisque les pôles de $\Phi(z)$ [ou $\Phi_1(z)$] et les zéros de $F_1(z)$ sont extérieurs au cercle de rayon $|\alpha_2|$. Donc les séries $\Sigma\alpha_1^n s'_n$, $\Sigma\alpha_2^n s'_n$ convergent, ce qui justifie la proposition. Cela posé, étudions le déterminant

$$D_{n,p} = \begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+p-1} \\ s_n & s_{n+p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{A}{\alpha_1^n} + \dfrac{B}{\alpha_2^n} + s'_{n-1} & \dfrac{A}{\alpha_1^{n+p}} + \dfrac{B}{\alpha_2^{n+p}} + s'_{n+p-1} \\ \dfrac{A}{\alpha_1^{n+1}} + \dfrac{B}{\alpha_2^{n+1}} + s'_n & \dfrac{A}{\alpha_1^{n+p+1}} + \dfrac{B}{s_2^{n+p+1}} + s'_{n+p} \end{vmatrix}.$$

Multipliant la deuxième colonne par α_1^p et retranchant de la première, il vient

$$D_{n,p} = \begin{vmatrix} \dfrac{B}{\alpha_2^n}\left(1 - \dfrac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) + s'_{n-1} - \alpha_1^p s'_{n+p-1} & \dfrac{A}{\alpha_1^{n+p}} + \dfrac{B}{\alpha_2^{n+p}} + s'_{n+p-1} \\ \dfrac{B}{\alpha_2^{n+1}}\left(1 - \dfrac{\alpha_2^p}{\alpha_2^p}\right) + s'_n - \alpha_1^p s'_{n+p} & \dfrac{A}{\alpha_1^{n+p+1}} + \dfrac{B}{\alpha_2^{n+p+1}} + s'_{n+p} \end{vmatrix}.$$

Multipliant la première colonne par $\frac{1}{\alpha_2^p}$ et retranchant de la deuxième, multipliée au préalable par $1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}$,

$$D_{n,p} \mp \frac{1}{1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}} \begin{vmatrix} \frac{B}{\alpha_2^n}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) + s'_{n-1} - \alpha_1^p s'_{n+p-1} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p}}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) - \frac{1}{\alpha_2^p} s'_{n-1} + s'_{n+p-1} \\ \frac{B}{\alpha_2^{n+1}}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^n}\right) + s'_n - \alpha_1^p s'_{n+p} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p+1}}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) - \frac{1}{\alpha_2^p} s'_n + s'_{n+p} \end{vmatrix};$$

d'où

$$\alpha_2^n \alpha_1^{n+p} D_{n,p}$$
$$= \frac{1}{1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}} \begin{vmatrix} B\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_1^p}\right) + \alpha_2 \underline{\alpha_2^{n-1} s'_{n-1}} - \alpha_1 \frac{\alpha_1^{p-1}}{\alpha_2^{p-1}} \underline{\alpha_2^{n-p-1} s'_{n+p-1}} & A\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) - \alpha_1 \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \underline{\alpha_1^{n-1} s'_{n-1}} + \alpha_1 \underline{\alpha_1^{n+p-1} s'_{n+p-1}} \\ \frac{B}{\alpha_2}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) + \underline{\alpha_2^n s'_n} - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \underline{\alpha_2^{n+p} s'_{n+p}} & \frac{A}{\alpha_1}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \underline{\alpha_1^n s'_n} + \underline{\alpha_1^{n+p} s'_{n+p}} \end{vmatrix}$$

Les expressions *soulignées* tendent vers zéro quand n croît indéfiniment, p restant fini et bien déterminé.

Donc

$$\alpha_2^n \alpha_1^{n+p} D_{n,p} = \frac{AB}{1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}} \begin{vmatrix} 1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} & 1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \\ \frac{1}{\alpha_2}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) & \frac{1}{\alpha_1}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) \end{vmatrix} + R_{n,p} = AB\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right) + R_{n,p},$$

où $R_{n,p}$ *tend vers zéro,* quand n croît indéfiniment, p restant fini, et

$$\alpha_1^{n+p+1} \alpha_3^{n+p+1} D_{n,p} = AB(\alpha_2^p - \alpha_1^p)(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p+1} R_{n,p}.$$

On en conclut

$$\frac{\alpha_1^{n+p+1} \alpha_2^{n+p+1} D_{n,p}}{\alpha_1^{n+p+2} \alpha_2^{n+p+2} D_{n+1,p}} = \frac{AB(\alpha_2^p - \alpha_1^p)(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p+1} R_{n,p}}{AB(\alpha_2^p - \alpha_1^p)(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p+1} R_{n+1\,p}};$$

d'où

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+p-1} \\ s_n & s_{n+p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+p} \\ s_{n+1} & s_{n+p+1} \end{vmatrix}} = \alpha_1 \alpha_2.$$

En particulier,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_n \\ s_n & s_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+1} \\ s_{n+1} & s_{n+2} \end{vmatrix}} = \alpha_1 \alpha_2$$

On en conclut encore

$$\frac{\alpha_2^{n+p+2} \alpha_2^{n+p+2} \mathrm{D}_{n,p+1}}{\alpha_1^{n+p+2} \alpha_2^{n+p+2} \mathrm{D}_{n+1,p}} = \frac{\mathrm{AB}(\alpha_2^{p+1} - \alpha_1^{p+1})(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p+2} \mathrm{R}_{n,p+1}}{\mathrm{AB}(\alpha_2^{p} - \alpha_1^{p})(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p} \mathrm{R}_{n+1,p}};$$

d'où

$$\lim_{n=\infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+p} \\ s_n & s_{n+p+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+p} \\ s_{n+1} & s_{n+p+1} \end{vmatrix}} = \frac{\alpha_2^{p+1} - \alpha_1^{p+1}}{\alpha_2^{p} - \alpha_1^{p}}.$$

En particulier,

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+1} \\ s_n & s_{n+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+1} \\ s_{n+1} & s_{n+2} \end{vmatrix}} = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Ainsi, quand n croît indéfiniment, *les racines de l'équation*

$$(7) \qquad z^2 - \frac{s_n s_{n+1} - s_{n-1} s_{n+2}}{s_{n+1}^2 - s_n s_{n+2}} z + \frac{s_n^2 - s_{n-1} s_{n+1}}{s_{n+1}^2 - s_n s_{n+2}} = 0$$

tendent vers α_1, α_2.

On peut de même construire l'équation ayant pour racines les deux racines de plus grand module α_1, α_2 sous condition que leurs modules soient plus grands que les modules de toutes les autres racines.

Wronski, au moyen des fonctions *aleph* composées, qui sont aux fonctions *aleph* simples ce que les coefficients de l'équation en α_1, α_2 sont à s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, a formé semblablement l'équation (7) et l'équation donnant les deux racines de plus grands modules.

III *Les modules des $p (p > 2)$ racines les plus proches du point $z = 0$ sont identiques.*

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \ldots \leqq |\alpha_p| < |\alpha_{p+1}| \leqq |\alpha_{p+2}| \leqq \ldots$$

Dans ce cas, comme dans le cas de $p = 2$, on peut former [1], *et Wronski l'avait fait,* l'équation de degré p admettant les racines $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$; Wronski avait aussi formé l'équation admettant les racines $\alpha_{q+1}, \alpha_{q+2}, \dots, \alpha_m$ si $|\alpha|_q > |\alpha_{q+1}| \leqq |\alpha_{q+2}| \leqq \dots \leqq |\alpha_m|$.

Il est plus simple d'observer qu'une substitution $z = a + Z$ où a est convenablement choisi, et d'ailleurs facile à choisir, fait que une ou deux racines seulement se trouvent sur le cercle de convergence de $\frac{\Phi(Z)}{F(Z)}$.

La méthode indiquée donnera donc, dans tous les cas, soit *une*, soit *deux* racines : je parle de valeurs approchées. D'où formation possible d'une équation approchée, admettant comme racines des valeurs approchées des autres racines de la proposée. On pourra calculer ainsi des valeurs *approchées* des racines de l'équation proposée. Cela permettra de construire un cercle C de centre $x = h$, $y = k$ à l'intérieur duquel sera la *seule* racine α_λ que l'on voudra calculer avec telle approximation fixée à l'avance. Faisant, en effet, sur l'équation, la substitution

$$x + iy = z = X + h + i(Y + k),$$

l'équation transformée en Z aura la *seule* racine $\alpha_\lambda + h + ik$ dans le cercle C ayant son centre au point $Z = 0$. Dès lors, la méthode exposée au paragraphe I permettra de calculer $\alpha_\lambda + h + ik$, d'où α_λ, avec telle approximation que l'on voudra.

IV. Dans la méthode exposée, le choix des indéterminées

$$s_0, \quad s_1, \quad \dots, \quad s_{m-1}$$

influe sur la convergence plus ou moins rapide des rapports déterminant les racines. *Nous n'avons actuellement aucun moyen d'étudier* A PRIORI *la rapidité de la convergence. Si nous remarquons que dans les équations traitées par Wronski* (et ces équations ne peuvent avoir été choisies à cet effet) *la convergence s'affirme comme* TRÈS RAPIDE, *nous devons conclure que le* CHOIX DES FONCTIONS ALEPH EST, selon toute vraisemblance, PARFAITEMENT APPROPRIÉ A LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

---

(1) HADAMARD, *loc. cit.*, p. 71.

Conclusion. — H. Wronski avait indiqué, voici près d'un siècle, la méthode de réduction des équations numériques algébriques que de récents travaux ont retrouvée, seule méthode qui atteigne pleinement le but proposé.

A vrai dire, Wronski n'avait pas fait la discussion de sa méthode : mais les notions restreintes que les géomètres ses contemporains avaient de l'Analyse ne lui permettaient pas de faire cette discussion.

Du moins, Wronski a-t-il eu le mérite d'indiquer une *base*, les fonctions *aleph,* permettant de construire des expressions rapidement convergentes, ce que nul après lui n'a tenté.

Cependant, l'exposé de Wronski est à ce point... *obscur* et plus, qu'il ne pouvait guère être compris tel qu'il est. *Il était nécessaire,* pourrait-on dire, *que les résultats de l'énigmatique Polonais fussent retrouvés par une voie nouvelle.*