Bulletin de la S. M. F.

E. Maillet

Sur les mouvements d'une nappe souterraine, particulièrement dans les terrains perméables, spongieux et fissurés

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 2-12

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__2_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LES MOUVEMENTS D'UNE NAPPE SOUTERRAINE, PARTICULIÈREMENT DANS LES TERRAINS PERMÉABLES, SPONGIEUX ET FISSURÉS [1];

Par M. EDMOND MAILLET.

I.

Nous déterminerons ici principalement :

1° Les équations indéfinies du mouvement de la nappe dans un pareil terrain, particulièrement dans les périodes où il ne reçoit pas d'apports extérieurs.

2° Les formes du fond de la nappe pour lesquelles il y a un régime où l'épaisseur de la nappe ne dépend que du temps. Il y a alors un régime où le débit de chaque source est de la forme

$$Q = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t},$$
$$(\alpha_1, \alpha_2 > 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, C_1, C_2 \text{ const.}).$$

3° Le cas d'un fond horizontal.

II.

Considérons une nappe souterraine dont le fond a pour équation (dans un système d'axes rectangulaires, Oz étant vertical)

$$z_0 = f_0(x, y), \tag{1}$$

et la surface

$$z = f(x, y, t). \tag{2}$$

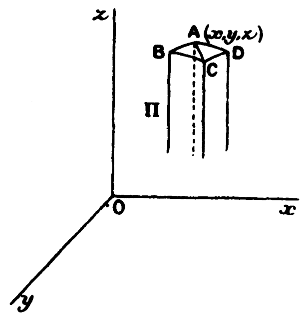
Supposons qu'en chaque point l'élément de surface de la nappe dont la projection sur Oxy est $dx\,dy$ reçoive un apport superficiel venant de l'extérieur $\chi\,dx\,dy\,dt$, pendant le temps dt (χ fonction de x, y et t).

---

(1) Ce Mémoire a été déposé à la séance du 17 novembre 1904. (*Note de la Réd.*)

Considérons alors ce qui se passe à l'intérieur du prisme indéfini Π dont $dx\,dy$ est la section droite (*fig.* 1).

Fig. 1.



Nous admettrons, d'après les expériences de Dupuit, que la vitesse horizontale moyenne v_l sur la verticale en un point A est dirigée dans le plan tangent vertical à la ligne de plus grande pente AC de la surface et proportionnelle à la pente de cette ligne, c'est-à-dire

$$v_l = k\frac{\partial z}{\partial l} \tag{3}$$

(k constante spécifique du terrain); elle est orientée du côté où z décroît sur la surface de la nappe; l désigne une longueur comptée suivant la tangente en (x, y) à la projection P de la ligne de plus grande pente sur Oxy. On a alors

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l}, \tag{4}$$

et, si n indique une direction normale à l en (x, y) dans le plan Oxy,

$$\frac{\partial z}{\partial n} = 0 = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}, \tag{5}$$

puisque l est pris sur une ligne de plus grande pente.

Soit α l'angle de Ox et de la tangente à P en (x, y) :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial l} &= \cos\alpha = \frac{\partial y}{\partial n}, \\ \frac{\partial y}{\partial l} &= \sin\alpha = -\frac{\partial x}{\partial n}; \end{aligned}\right.$$

d'après (5),

$$\frac{\partial z}{\partial x}\sin\alpha = \frac{\partial z}{\partial y}\cos\alpha,$$

et, d'après (4),

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Si v_x et v_y sont les composantes de v_l suivant Ox et Oy, d'après (3),

$$(6)\qquad \begin{cases} v_x = v_l\cos\alpha = k\dfrac{\partial z}{\partial x}, \\ v_y = v_l\sin\alpha = k\dfrac{\partial z}{\partial y}. \end{cases}$$

Ceci posé, cherchons l'équation de continuité, en examinant ce qui se passe dans le prisme Π pendant le temps dt.

Le volume qui entre à travers la face AB, parallèle à Oyz, est

$$-k\varphi\, dy\, dt(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x};$$

il faut le signe —, car l'expression doit être positive quand $\frac{\partial z}{\partial x}$ est négatif; φ est la proportion du vide par unité de surface dans le terrain.

Le volume qui sort à travers la face CD est

$$-k\varphi\, dy\, dt\left\{(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x} + dx\frac{\partial}{\partial x}\left[(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x}\right]\right\}.$$

Le prisme perd ainsi

$$-k\varphi\, dx\, dy\, dt\frac{\partial}{\partial x}\left[(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x}\right].$$

Il perd, à travers les faces parallèles à Oxz,

$$-k\varphi\, dx\, dy\, dt\frac{\partial}{\partial y}\left[(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial y}\right].$$

Le prisme gagne d'autre part

$$\chi\, dx\, dy\, dt,$$

apport des parties du terrain non comprises dans la nappe au temps t et situées au-dessus de la surface libre de celle-ci; cet apport se fait par le haut.

Enfin, à la partie supérieure, le volume de la nappe contenu dans le prisme augmente de

$$\varphi\, dx\, dy\, dt \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Il en résulte

$$(7) \qquad \frac{\chi}{\varphi} = \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[k(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[k(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial y}\right].$$

Cette équation, quand on y fait $\chi = 0$, se réduit à une équation indiquée par M. Boussinesq ([1]); quand on y suppose les mouvements parallèles au plan Oxz, elle se réduit, χ étant quelconque, à une équation indiquée par moi ([2]).

Elle permettra, par exemple, d'aborder l'étude du mouvement dans une nappe alimentée par les pluies ([3]), quand on suppose que le mouvement se fait parallèlement à Oxz.

Elle permet encore d'étudier les mouvements d'une nappe dans un terrain perméable et spongieux. Nous allons nous occuper d'un des cas que l'on peut y rencontrer.

III.

Nous supposerons dorénavant un terrain perméable formé de masses de petites dimensions susceptibles de s'imbiber d'eau à certains moments ou de restituer à d'autres moments cette eau d'imbibition. L'eau qui pénètre dans ce terrain, l'eau de pluie par exemple, imbibe en partie les masses qu'elle rencontre, gagne en partie la partie inférieure ([4]) où l'eau circule entre les vides des

---

([1]) *Comptes rendus*, 22 juin 1903, p. 1511. Nous suivons ici une marche assez analogue; nous supposons, dans ce qui précède, k constant; mais (7) subsiste évidemment quand k varie dans l'étendue de la nappe.

([2]) Équation (21 *bis*), p. 55 de mes *Essais d'Hydraulique souterraine et fluviale*. Paris, Hermann, 1904.

([3]) *Ibid.*

([4]) *Voir* mes *Essais d'Hydraulique* précités, p. 136, 204-205 et 216. Dans le terrain considéré, la nappe est la partie où non seulement les masses en question sont complètement imbibées, mais encore où l'eau remplit tous les intervalles entre ces masses, intervalles qui forment des canaux capillaires.

masses. Voyons ce qui se passe quand il n'y a plus d'apports extérieurs (par la surface du terrain par exemple), ou quand ils sont négligeables.

Sur la verticale qui se projette au point (x, y), au temps t, la nappe occupe l'espace compris entre le fond, d'ordonnée z_0, et la surface libre de la nappe, d'ordonnée z. Au-dessus, jusqu'au point d'ordonnée z_1 par exemple, règne un terrain imbibé qui laisse échapper d'une manière continue son eau d'imbibition suivant une certaine loi. Dans cette partie, un petit volume ϖ, en (x, y, z_2), perd, pendant le temps dt, la quantité d'eau d'imbibition

$$k_1 \varpi \Phi(t, z_2)\, dt, \qquad (k \text{ const.}),$$

que nous admettons (¹), par hypothèse, être proportionnelle au volume d'eau d'imbibition $\varpi\Phi(t, z_2)$ contenu au temps t dans ϖ. On aura ainsi

$$k_1 \varpi \Phi(t, z_2)\, dt + \varpi \Phi'_t(t, z_2)\, dt = 0$$

ou

$$(8) \qquad k_1 \Phi(t, z_2) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

On peut alors considérer l'apport $\chi\, dx\, dy\, dt$ dans le prisme Π comme étant au temps t, la somme des apports des masses $dx\, dy\, dz$ situées dans ce prisme entre z et z_1, l'eau perdue par les masses ϖ étant supposée se mouvoir verticalement vers le bas, et ne pas profiter aux masses ϖ inférieures situées au-dessus de la surface libre de la nappe; on négligera le temps relativement faible que met l'apport $k_1 \varpi \Phi(t, z_2)\, dt$ pour parvenir en (x, y, z). On aura alors

$$\chi\, dx\, dy\, dt = dx\, dy\, dt \int_z^{z_1} k_1 \Phi(t, z_2)\, dz_2,$$

$$(9) \qquad \chi = k_1 \int_z^{z_1} \Phi(t, z_2)\, dz_2.$$

Cette hypothèse paraît assez plausible *dans des terrains spongieux très fissurés verticalement*.

(¹) Comp. *Essais* ci-dessus, p. 304; $\Phi(t, z_2)$ peut dépendre de x et y.

Faisons croître t de dt; on a, d'après (9),

$$\chi + \frac{\partial \chi}{\partial t} dt = k_1 \int_{z+\frac{\partial z}{\partial t}dt}^{z_1} \Phi(t+dt, z_1)\, dz_1$$

$$= k_1 \int_{z}^{z_1} \Phi(t, z_1)\, dz_1 + k_1\, dt \int_{z}^{z_1} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dz_1$$

$$+ k_1 \int_{z+\frac{\partial z}{\partial t}dt}^{z} \Phi(t, z_1)\, dz_1,$$

ou

$$\chi + \frac{\partial \chi}{\partial t} dt = \chi - k_1\, dt \int_{z}^{z_1} k_1 \Phi(t, z_1) dz_1 - k_1 \Phi(t, z) \frac{\partial z}{\partial t} dt,$$

ou

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = - k_1 \chi - k_1 \mathrm{A} \frac{\partial z}{\partial t}, \qquad (\mathrm{A}\ \text{const.}),$$

puisque, au contact de la nappe, dont le niveau est supposé s'abaisser, l'imbibition des volumes ϖ que la nappe vient d'abandonner est encore complète, et que $\Phi(t, z) = \mathrm{A} = \text{const.}$ L'équation permettant de définir χ est donc

$$(10) \qquad \frac{\partial \chi}{\partial t} + k_1 \chi + k_1 \mathrm{A} \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

Les équations indéfinies du mouvement dans le terrain perméable, spongieux et fissuré verticalement sont ici les équations (7) *et* (10).

IV.

Mouvements où l'épaisseur de la nappe ne dépend que du temps. — On peut encore se proposer de chercher quelles sont les formes de nappes où l'épaisseur peut ne dépendre que du temps (c'est-à-dire être la même partout à chaque instant), comme nous l'avons fait pour les nappes en terrains perméables, mais non spongieux (¹) (sensiblement). Posons

$$z = z_0 + \psi,$$

où ψ ne dépend que de t,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_0}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z_0}{\partial y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{d\psi}{dt}.$$

(¹) *Essais d'Hydraulique* précités, p. 48, 53, 55.

(7) et (10) deviennent

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\chi}{\varphi} - \dfrac{d\psi}{dt} + k\psi\left(\dfrac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial t} + k_1\chi + k_1 A \dfrac{d\psi}{dt} = 0. \end{cases}$$

Eliminons χ : nous adjoindrons à ces deux équations la première équation (11) dérivée par rapport au temps :

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{d^2\psi}{dt^2} + k\frac{d\psi}{dt}\left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right) = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\varphi} & 0 & -\dfrac{d\psi}{dt} + k\psi\left(\dfrac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right) \\ k_1 & 1 & k_1 A \dfrac{d\psi}{dt} \\ 0 & \dfrac{1}{\varphi} & -\dfrac{d^2\psi}{dt^2} + k\dfrac{d\psi}{dt}\left(\dfrac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Développons :

$$\frac{1}{\varphi}\left[-\frac{d^2\psi}{dt^2} + k\frac{d\psi}{dt}\left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{k_1}{\varphi}\left[-\frac{d\psi}{dt} + k\psi\left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right)\right] - \frac{k_1}{\varphi^2} A \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

$$(12)\qquad k\left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right)\left[\frac{d\psi}{dt} + k_1\psi\right] = \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{d\psi}{dt}\left(k_1 + k_1\frac{A}{\varphi}\right).$$

Il en résulte de suite que l'on a : soit

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = 2c = \text{const.},$$

soit

$$(14)\qquad \frac{d\psi}{dt} + k_1\psi = 0.$$

Premier cas : (14) a lieu. — On devra avoir en même temps, d'après (12) :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(k_1 + k_1\frac{A}{\varphi}\right)\frac{d\psi}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\psi}{dt} + k_1\psi = 0,$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + k_1\frac{d\psi}{dt} = 0,$$

d'où

$$k_1 \frac{A}{\varphi} \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

$\psi = \text{const.} = 0 = \chi$, ce qui est absurde, ou $A = 0$, ce qui est impossible, le terrain étant spongieux. Finalement, (14) n'a pas lieu.

Deuxième cas : (13) a lieu. — (12) devient

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(k_1 + k_1 \frac{A}{\varphi} - 2kc\right)\frac{d\psi}{dt} - 2kk_1 c\psi = 0.$$

C'est une équation linéaire à coefficients constants, dont l'intégrale générale est (sauf un cas particulier où $\alpha_1 = \alpha_2$),

$$\psi = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t},$$

α_1, α_2 étant les racines de l'équation

$$\alpha^2 - \left(k_1 + k_1 \frac{A}{\varphi} - 2kc\right)\alpha - 2kk_1 c = 0.$$

Nous supposerons $c < 0$. Alors

$$\begin{aligned}\delta &= \left(k_1 + k_1 \frac{A}{\varphi} - 2kc\right)^2 + 8kk_1 c \\ &= (k_1 - 2kc)^2 + 2(k_1 - 2kc)\frac{k_1 A}{\varphi} + \frac{k_1^2 A^2}{\varphi^2} + 8kk_1 c \\ &= (k_1 + 2kc)^2 + 2(k_1 - 2kc)\frac{k_1 A}{\varphi} + \frac{k_1^2 A^2}{\varphi^2}\end{aligned}$$

est essentiellement positif (¹), et α_1, α_2 sont réels; d'après $c < 0$, α_1, α_2 sont positifs.

Les surfaces (13) ont leur équation de la forme

$$z_0 = f(x + yi) + f_1(x - yi) + c\frac{x^2 + y^2}{2}.$$

(¹) Dans la pratique, $2kc$ sera sans doute parfois petit par rapport à k_1 (*voir* mes *Essais d'Hydraulique* précités, p. 194, 202-203, 204-206, par exemple), et l'expression δ sera > 0, d'où $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Il en résulte pratiquement qu'une des racines α_1 est petite par rapport à l'autre α_2. Alors, dans les limites de la pratique, une expression de la forme $\psi = C_1 + C_2 e^{-\alpha_2 t}$ pourra représenter χ avec une approximation suffisante. Une expression analogue pourra également suffire pour représenter à peu près le débit d'une source issue de la nappe.

Toutefois, d'après moi, cette théorie semblerait pouvoir plutôt s'appliquer aux sources à variation de débit assez rapide. Ce n'est d'ailleurs qu'une opinion provisoire.

Un cas particulièrement intéressant est celui où le mouvement le fait parallèlement à Oxz, le fond étant un cylindre de génératrices parallèles à Oy. Alors, d'après (13),

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} = 2c,$$

$$z_0 = a + bx + cx^2 \qquad (c < 0).$$

Le fond est un cylindre parabolique convexe. A la limite amont de la nappe, au sommet de la parabole, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_0}{\partial x} = b + 2cx = 0$; le débit

$$Q = B(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x}$$

y est nul. Le débit par unité de largeur de la nappe en un point quelconque est

$$Q = B_1 \psi(b + 2cx);$$

par suite, sous certaines hypothèses ([1]), le débit d'une source alimentée par cette nappe est de la forme $Q = B_2\psi$. Donc, appelant encore *régime propre ou non influencé de la nappe en terrain spongieux et fissuré verticalement* celui où elle ne reçoit d'autres apports extérieurs que les pertes d'eau d'imbibition faites par le terrain spongieux situé au-dessus de cette nappe, nous pouvons dire :

Soit une nappe en terrain perméable spongieux et fissuré verticalement dont le fond est un cylindre parabolique convexe de génératrices parallèles à Oy, d'ordonnée

$$z_0 = a + bx + cx^2 \qquad (c < 0);$$

il existe pour cette nappe un régime propre ou non influencé où l'épaisseur ψ de la nappe est à l'instant t la même dans toute l'étendue de la nappe ([2]). *On a en général*

$$\psi = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t},$$

([1]) *Essais d'Hydraulique* précités, p. 9. Dans le régime considéré ici, d'après (11), χ est fonction de t seul.

([2]) Comme dans le cas où $A = \chi = 0$. Comp. *Essais d'Hydraulique* précités, p. 48.

avec α_1, $\alpha_2 > 0$. *Au voisinage d'une verticale quelconque donnée, le débit est proportionnel à* ψ.

Dans un cas étendu, le débit d'une source alimentée par cette nappe est proportionnel à ψ.

Nous pouvons encore chercher à étudier si ces nappes peuvent avoir, à la suite d'une pluie uniforme tombant dans leur étendue, le même régime, avec, au besoin, des valeurs différentes des constantes C_1 et C_2.

Aussitôt après la cessation de la pluie, la fonction $\Phi(t, z_2)$, peut-être aussi la limite z_1, vont se trouver modifiées; mais l'on voit encore que les mêmes calculs sont applicables. La solution trouvée reste encore valable; les valeurs de C_1 et C_2 pourront être modifiées.

On peut encore chercher les solutions de (7) et (10), où χ est fonction du temps seul. D'après (10), $\frac{\partial z}{\partial t}$ est fonction du temps seul, et

$$z = z_0 + \zeta + \psi,$$

où ψ est fonction de t, ζ fonction de x et y.

On substituera dans (7), et, pour continuer, on s'inspirera de ce que nous avons fait ailleurs [1]. On retrouvera, bien entendu, la solution précédente où $\zeta = 0$.

V.

Cas d'un fond horizontal $z_0 = 0$. — Comme l'a fait remarquer M. Boussinesq [2] pour le cas où

$$A = \chi = 0,$$

on peut encore ici chercher une solution z de la forme

$$z = \psi(t)\zeta(x, y),$$

où ζ ne dépend pas de t, ψ ne contenant que t.

---

[1] Surtout dans le cas où $\frac{\partial z_0}{\partial y} = 0$; voir *Essais d'Hydraulique* précités, p. 45 et suiv.

[2] *Comptes rendus*, 6 juillet 1903, p. 5 et suivantes.

(7) et (10) deviennent

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\chi}{\varphi} = \zeta\frac{d\psi}{dt} - k\psi^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right],\\ &\frac{\partial\chi}{\partial t} + k_1\chi + k_1 A\zeta\frac{d\psi}{dt} = 0. \end{aligned}\right.$$

Éliminons χ, en adjoignant aux équations (15) la première de ces deux équations dérivée par rapport à t :

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\chi}{\partial t} = \zeta\frac{d^2\psi}{d^2t} - 2k\psi\frac{d\psi}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right],$$

d'où

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\varphi} & 0 & \zeta\frac{d\psi}{dt} - k\psi^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right] \\ k_1 & 1 & -k_1 A\zeta\frac{d\psi}{dt} \\ 0 & \frac{1}{\varphi} & \zeta\frac{d^2\psi}{dt^2} - 2k\psi\frac{d\psi}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right] \end{vmatrix},$$

ou

$$\begin{aligned} &\zeta\frac{d^2\psi}{dt^2} - 2k\psi\frac{d\psi}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right]\\ &\quad + k_1\left\{\zeta\frac{d\psi}{dt} - k\psi^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right]\right\} + \frac{k_1 A}{\varphi}\zeta\frac{d\psi}{dt} = 0, \end{aligned}$$

ou enfin

$$\zeta\left\{\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(k_1 + k_1\frac{A}{\varphi}\right)\frac{d\psi}{dt}\right\} = \left(2k\psi\frac{d\psi}{dt} + kk_1\psi^2\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right].$$

On en conclut, λ étant une constante,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) = \lambda\zeta,$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(k_1 + k_1\frac{A}{\varphi}\right)\frac{d\psi}{dt} - 2k\lambda\psi\frac{d\psi}{dt} - kk_1\lambda\psi^2 = 0.$$

La première de ces deux équations est identique à celle que M. Boussinesq a trouvée par une méthode semblable dans le cas où $A = \chi = 0$. Quand les mouvements se font parallèlement à Oxz, on a encore comme solution une valeur de ζ qui s'exprime par les fonctions elliptiques. Mais la valeur de ψ, qui renfermera deux constantes arbitraires, paraît plus compliquée.