

BULLETIN DE LA S. M. F.

H. ANDOYER

Sur la sommation des séries

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 36-41

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__36_1

© Bulletin de la S. M. F., 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA SOMMATION DES SÉRIES;

Par M. H. ANDOYER.

La méthode qui se présente naturellement pour obtenir la somme d'une série numérique consiste à calculer directement la somme d'un certain nombre de termes à partir du premier, et à fixer, quand on le peut, une limite de l'erreur ainsi commise. Malheureusement, il arrive trop souvent que cette méthode n'a aucune valeur pratique : c'est ainsi qu'en calculant exactement la somme des vingt mille premiers termes de la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

et en supposant que les calculs eux-mêmes ne donnent lieu à

aucune erreur, on obtient un résultat dont l'erreur atteint encore 0,000025 environ.

Cependant les ouvrages classiques en usage de nos jours sont muets sur les méthodes à employer pour obtenir des résultats plus satisfaisants. Il ne semblera donc peut-être pas inutile d'indiquer comment on peut procéder pour obtenir rapidement, avec une grande précision, facile d'ailleurs à évaluer, la somme de certaines séries formant une classe très étendue. Le principe de la méthode que nous allons expliquer est indiqué et longuement développé par J. Stirling (*Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, Londres, 1730); nous n'avons fait que le présenter d'une façon générale et approprier son exposition aux habitudes actuelles.

Envisageons la série convergente de terme général u_n , l'indice n prenant successivement les valeurs $n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$, telle que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit développable suivant les puissances décroissantes de n ; c'est-à-dire que, q étant un entier positif quelconque, on peut écrire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \dots + \frac{\alpha_q}{n^q} + \frac{A_{q+1}}{n^{q+1}},$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ étant des constantes, et A_{q+1} une fonction de n ayant une limite quand n devient infini.

On a d'ailleurs $|\alpha_0| \leq 1$; de plus, si $\alpha_0 = 1$, il faut, comme on sait d'après la règle de Gauss, $\alpha_1 < -1$; et si $\alpha_0 = -1$, le premier des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ qui n'est pas nul est positif.

Si

$$\begin{aligned} s_n &= u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_{n-1} + u_n, \\ r_n &= u_{n+1} + u_{n+2} + \dots, \end{aligned}$$

la somme de la série est

$$S = s_n + r_n.$$

Soit ε_n une fonction de n ayant comme limite zéro pour n infini, et faisons

$$u'_n = u_n + \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n;$$

la série dont le terme général est u'_n est convergente, et si l'on

fait

$$r'_n = u'_{n+1} + u'_{n+2} + \dots,$$

on a évidemment

$$r_n = x_{n+1} + r'_n;$$

si de plus on pose

$$x_n = u_n t_n,$$

on a

$$u'_n = u_n \left(1 - t_n + \frac{u_{n+1}}{u_n} t_{n+1} \right),$$

avec

$$r_n = u_{n+1} t_{n+1} + r'_n.$$

Le calcul de r_n est ainsi ramené à celui de r'_n ; en choisissant t_n de façon convenable, on pourra, comme nous allons le voir, obtenir une valeur approchée de r_n comprise entre des limites faciles à déterminer, et, en ajoutant à r_n la somme s_n calculée directement, on aura finalement S avec une approximation qu'on peut fixer.

Pour le choix de t_n il est nécessaire de distinguer deux cas, suivant que α_0 est inférieur ou égal à 1.

Supposons d'abord $\alpha_0 < 1$, et faisons

$$t_{n+1} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \dots + \frac{\beta_{p+1}}{n^{p+1}},$$

les β_i étant des constantes, p un entier positif quelconque. On aura par suite

$$t_n = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n-1} + \frac{\beta_2}{(n-1)^2} + \dots + \frac{\beta_{p+1}}{(n-1)^{p+1}},$$

et en développant chaque terme suivant les puissances décroissantes de n , on a

$$t_n = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2 + \beta_1}{n^2} + \frac{\beta_3 + 2\beta_2 + \beta_1}{n^3} + \dots$$

$$+ \frac{\beta_p + (p-1)\beta_{p-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} \beta_{p-2} + \dots}{n^p} + \frac{\beta_{p+1}}{n^{p+1}},$$

la loi des numérateurs étant évidente, et B_{p+1} étant une fonction de n ayant une limite pour n infini.

Si maintenant nous nous servons de la valeur de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en y

faisant $q = p$, on voit que l'expression .

$$T = 1 - t_n + \frac{u_{n+1}}{u_n} t_{n+1}$$

se développe elle-même sous la forme

$$\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \dots + \frac{\gamma_p}{n^p} + \frac{C_{p+1}}{n^{p+1}},$$

$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$ étant des constantes, et C_{p+1} une fonction de n ayant une limite pour n infini. On voit alors que, à cause de $1 - \alpha_0 \neq 0$, on peut choisir $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ de façon à annuler $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$, et de plus β_{p+1} de façon que la limite de C_{p+1} ait une valeur donnée à l'avance quelconque.

Si l'on a $\alpha_0 = 1$, le calcul précédent est impossible; mais on arrive au même résultat en faisant

$$t_{n+1} = \beta n + \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \dots + \frac{\beta_p}{n^p},$$

d'où

$$t_n = \beta n + (\beta_0 - \beta) + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2 + \beta_1}{n^2} + \dots + \frac{\beta_p + (p-1)\beta_{p-1} + \dots}{n^p} + \frac{B_{p+1}}{n^{p+1}},$$

comme plus haut; en se servant de la valeur de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, où l'on fait $q = p + 1$, on peut encore déterminer $\beta, \beta_0, \dots, \beta_{p-1}, \beta_p$ de façon que T ait la forme $\frac{C_{p+1}}{n^{p+1}}$, C_{p+1} ayant une limite arbitraire.

Ainsi, dans tous les cas

$$\frac{u'_n}{u_n} = \frac{C_{p+1}}{n^{p+1}},$$

C_{p+1} ayant une limite quelconque; or, on peut prendre n assez grand pour que la somme r'_n ait le signe de son premier terme u'_{n+1} ; en supposant donc la limite de C_{p+1} successivement positive et négative, on aura deux valeurs de r_n , fournies par l'expression $u_{n+1} t_{n+1}$, approchées en sens contraire, et d'autant moins différentes que p sera plus grand. Il en sera de même pour la somme S de la série proposée.

Les exemples suivants feront bien comprendre l'esprit de la méthode et son application.

1° Soit

$$u_n = \frac{(-1)^{n-n_0} C}{n-1},$$

C étant une constante.

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -1 + \frac{1}{n},$$

et l'on trouve qu'en faisant

$$t_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{\beta_5}{n^5},$$

on a

$$C_5 = -\beta_5 \left[1 + \left(\frac{n}{n-1} \right)^5 - \frac{1}{n} \right] + \frac{n(2n-1)^2}{8(n-1)^3}.$$

Pour $\beta_5 = 0$, la limite de C_5 est positive; pour $\beta_5 = \frac{1}{2}$, elle est négative, en donnant donc successivement ces deux valeurs à β_5 dans t_{n+1} , la valeur de r_n sera comprise entre les deux valeurs obtenues pour $u_{n+1} t_{n+1}$. Faisons par exemple $C = 1$, $n_0 = 2$, $n = 10$, de sorte que la série à sommer est

$$\log \text{ nép } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$$

On a directement

$$s_n = 0,745634920 \dots,$$

et r_n est compris entre $-0,0524875$ et $-0,0524880$; donc S est compris entre

$$0,69314742 \dots \text{ et } 0,69314692 \dots$$

De même en faisant

$$C = 2, \quad n_0 = \frac{3}{2}, \quad n = \frac{19}{2},$$

de sorte que la série à sommer est

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right),$$

on a directement

$$s_n = 3,25236593 \dots,$$

et r_n est compris entre $-0,11077263 \dots$ et $-0,11077399$; donc

S est compris entre

$$3,14159330\dots \text{ et } 3,14159194\dots$$

2° Soit

$$u_n = \frac{1}{(n-1)^2},$$

de sorte que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2};$$

on trouve qu'en faisant

$$t_{n+1} = n + \frac{1}{2} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{30n^3} + \frac{\beta_5}{n^5},$$

on a

$$C_6 = \frac{5n^5 - 5n^3}{30(n-1)^3} - \beta_5 \left[\frac{n^6}{(n-1)^5} - n + 2 - \frac{1}{n} \right].$$

Pour $\beta_5 = 0$, la limite de C_6 est positive; pour $\beta_5 = \frac{1}{10}$, elle est négative.

Faisant $n_0 = 2$, $n = 10$, de sorte que la série à sommer est

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

on a directement

$$s_n = 1,539767731\dots,$$

et r_n est compris entre

$$0,105166333\dots \text{ et } 0,105166343\dots;$$

donc S est compris entre

$$1,644934064\dots \text{ et } 1,644934074\dots$$

Pratiquement, on se dispense de calculer la quantité C_{p+1} , et l'allure du développement de t_{n+1} permet de se rendre compte d'une façon suffisante de l'approximation obtenue en arrêtant ce développement à un certain rang.
