BULLETIN DE LA S. M. F.

DE SPARRE

Note au sujet des mouvements à la surface de la terre

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 65-72
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__65_0>

NOTE AU SUJET DES MOUVEMENTS A LA SURFACE DE LA TERRE;

Par M. le Comte DE SPARRE.

Dans l'étude des mouvements à la surface de la Terre on a coutume de négliger les termes de l'ordre du carré de la vitesse angulaire ω de la rotation de la Terre et cette manière de faire est parfaitement justifiée, car ces termes sont, d'une part, si petits qu'ils échapperaient complètement à l'observation et, d'autre part, beaucoup d'autres causes perturbatrices secondaires peuvent être du même ordre.

Toutefois, comme certains auteurs ont voulu tenir compte de ces termes en ω^2 et qu'ils l'ont fait d'une façon inexacte [1], je me propose d'établir les équations du mouvement à la surface de la Terre en négligeant seulement les termes d'ordre supérieur à ω^3. Je me borne au cas de la Terre supposée sphérique et homogène ; en réalité, l'influence de l'aplatissement de la Terre introduit des termes de l'ordre de ω^2, ainsi que j'ai eu occasion de le montrer dans un petit Mémoire en cours de publication, mais je laisse ici cette influence de côté en me bornant, comme je viens de le dire, au cas de la Terre supposée sphérique et homogène ; le problème est en effet beaucoup plus simple dans ce cas et sa solution m'a paru présenter de l'intérêt, ne fût-ce qu'au point de vue théorique.

Je remarquerai d'abord que si R est le rayon de la Terre on a sensiblement

$$\frac{1}{R} = 1,2\,\omega^{\frac{5}{3}},$$

d'où

$$\frac{1}{R^2} = 1,44\,\omega^{3+\frac{1}{3}}$$

Donc, en négligeant les termes en $\frac{1}{R^2}$, nous ne négligerons que des termes d'ordre supérieur à ω^3.

Ceci posé :

Soit un système rectangulaire OXYZ où OZ a la direction de la

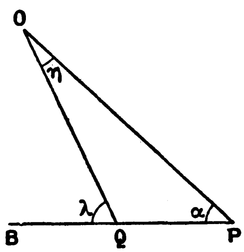
(1) J'ai eu, en particulier, occasion de le faire voir dans une Communication récente pour le cas de la chute libre des graves.

verticale dirigée vers le bas, OX est dans le plan du méridien et dirigé vers le sud et OY dirigé vers l'est. Soit de plus un second système $OX'YZ'$, qui a OY en commun avec le précédent et dans lequel OZ' est dirigé suivant le rayon terrestre et OX' toujours vers le sud dans le plan du méridien.

Je désigne de plus par λ la latitude vraie au point O, c'est-à-dire l'angle de OZ avec le plan de l'équateur, par α la latitude géocentrique au même point O (¹), par G l'attraction de la Terre sur l'unité de masse en O et par g la gravité au même point.

La gravité est la résultante de l'attraction G de la Terre en O et de la force centrifuge au même point, $\omega^2 R \cos\alpha$ (²).

Fig. 1.



Le triangle de composition de la gravité en O dans lequel $OQ = g$, $OP = G$, $PQ = \omega^2 R \cos\alpha$, $OPQ = \alpha$, $OQB = \lambda$, $QOP = \eta$ donne

$$(1)\qquad \begin{cases} G \sin\eta = \omega^2 R \cos\alpha \sin\lambda, \\ g \sin\eta = \omega^2 R \cos\alpha \sin\alpha, \\ G = g \cos\eta + \omega^2 R \cos^2\alpha, \\ \alpha = \lambda - \eta. \end{cases}$$

Soit maintenant un point M dont les coordonnées sont x, y, z par rapport au système OXYZ et x', y, z' par rapport au système $OX'YZ'$, et soit δ la distance de ce point au centre de la Terre.

Ce point est soumis de la part de la Terre, supposée, ainsi que nous l'avons dit, sphérique et homogène, s'il s'agit d'un point

(¹) Donc l'angle de OZ' avec le plan de l'équateur.

(²) En désignant ici par R la distance du point O au centre de la Terre, distance qui diffère fort peu du rayon de la Terre.

extérieur à sa surface, à une attraction égale à $\frac{GR^2}{\delta^2}$ dirigée suivant MC, C étant le centre de la Terre; elle aura pour composantes, suivant OX′, OY, OZ′,

$$-\frac{GR^2 x'}{\delta^3}, \quad -\frac{GR^2 y}{\delta^3}, \quad \frac{GR^2(R-z')}{\delta^3},$$

mais on a

$$\delta^2 = (R-z')^2 + x'^2 + y^2 = (R-z')^2\left[1 + \frac{x'^2+y^2}{(R-z')^2}\right],$$

de sorte que si nous négligeons les termes de l'ordre de $\frac{1}{R^2} = 1,44\,\omega^{3+\frac{1}{3}}$ nous pourrons prendre, pour les trois composantes de l'attraction,

$$-\frac{Gx'}{R}, \quad -\frac{Gy}{R}, \quad G\left(1+\frac{2z'}{R}\right).$$

S'il s'agissait de la chute dans un puits, puisque nous supposons la Terre sphérique et homogène, l'attraction serait $\frac{G\delta}{R}$ et ses composantes parallèles à OX′, OY, OZ′ seraient, par suite,

$$-\frac{Gx'}{R}, \quad -\frac{Gy}{R}, \quad G\left(1-\frac{z'}{R}\right).$$

Nous considérerons alors l'attraction comme la résultante d'une force constante comme grandeur et direction et égale à l'attraction G de la Terre sur l'unité de masse en O et d'une force déviatrice dont les composantes parallèles aux axes OX′, OY, OZ′ sont : dans le cas de points extérieurs à la surface de la Terre,

$$-\frac{Gx'}{R}, \quad -\frac{Gy}{R}, \quad \frac{2Gz'}{R},$$

et, dans le cas de points intérieurs,

$$-\frac{Gx'}{R}, \quad -\frac{Gy}{R}, \quad -\frac{Gz'}{R}.$$

Cette force déviatrice aura pour composante parallèle à l'axe OX, dans le premier cas,

$$X_1 = -\frac{G}{R}(x'\cos\gamma_1 + 2z'\sin\gamma_1),$$

et, dans le second,

$$X'_1 = -\frac{G}{R}(x'\cos\eta - z'\sin\eta).$$

Mais l'on a

$$x' = x\cos\eta + z\sin\eta, \qquad z' = z\cos\eta - x\sin\eta,$$

et, par suite,

$$X_1 = -\frac{G}{R}[x(1 - 3\sin^2\eta) + 3z\sin\eta\cos\eta], \qquad X'_1 = -\frac{G}{R}x.$$

Nous aurons ensuite

$$Y_1 = -\frac{Gy}{R}$$

puis, pour des points extérieurs,

$$Z_1 = \frac{G}{R}[2z'\cos\eta - x'\sin\eta] = \frac{G}{R}[z(2 - 3\sin^2\eta) - 3x\sin\eta\cos\eta]$$

et, pour des points intérieurs,

$$Z'_1 = -\frac{G}{R}z.$$

En tenant compte d'ailleurs des relations (1) les valeurs précédentes de X_1 et Z_1 pourront s'écrire

$$X_1 = -\frac{Gx}{R}(1 - 3\sin^2\eta) - 3\omega^2 z\cos\alpha\sin\lambda\cos\eta,$$

$$Z_1 = \frac{Gz}{R}(2 - 3\sin^2\eta) - 3\omega^2 x\cos\alpha\sin\lambda\cos\eta.$$

Nous considérons donc l'attraction de la Terre sur le point M, de masse *un*, comme la résultante de la force G, constante de grandeur et de direction, et des forces X_1, Y_1, Z_1 ou X'_1, Y_1, Z'_1.

Ceci posé, le système OXYZ a d'abord un mouvement d'entraînement qui est une translation égale à celle de son origine O; pour tenir compte de ce mouvement d'entraînement, on doit appliquer au point M une force égale à la force centrifuge en O, $\omega^2 R\cos\alpha$; cette force centrifuge constante de grandeur et de direction se combine à l'attraction G en O, également constante, pour donner la gravité g en O. On voit donc que, pour tenir compte du mouvement d'entraînement dû à la translation du système égale à celle de son origine, il suffit de remplacer l'attraction de la Terre G en O par la gravité g au même point, g étant constant de grandeur et parallèle à la verticale OZ en O.

Mais le système OXYZ a, en plus de la translation égale à celle de son origine O, une rotation autour d'un axe OI parallèle à celui de la Terre. Cette rotation donnera naissance :

1° A une force centrifuge composée dont les composantes parallèles à OX, OY, OZ sont, comme on sait,

$$X_2 = 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt},$$

$$Y_2 = 2\omega \cos\lambda \frac{dz}{dt} - 2\omega \sin\lambda \frac{dx}{dt},$$

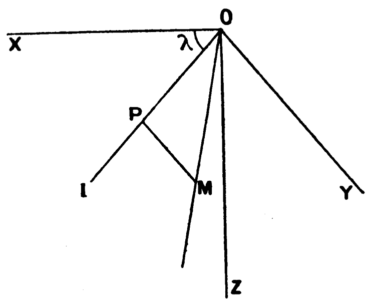
$$Z_2 = -2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt};$$

2° A une force centrifuge dont les composantes parallèles aux axes sont

$$X_3 = \omega^2 r \cos(r, X),$$
$$Y_3 = \omega^2 r \cos(r, Y),$$
$$Z_3 = \omega^2 r \cos(r, Z),$$

r désignant la perpendiculaire PM abaissée de M sur OI.

Fig. 2.



Mais $r \cos(r, X)$ est la projection de PM sur OX, projection qui est égale à celle du contour POM. D'ailleurs OP est la projection de OM sur OI, projection qui est égale à la somme de celles des coordonnées du point M.

On a donc

$$OP = x \cos\lambda + z \sin\lambda,$$

$$r\cos(r, X) = x - (x\cos\lambda + z\sin\lambda)\cos\lambda = (x\sin\lambda - z\cos\lambda)\sin\lambda.$$

On a donc, en opérant de même pour les trois axes,

$$\begin{aligned} X_3 &= \omega^2 \sin\lambda(x\sin\lambda - z\cos\lambda),\\ Y_3 &= \omega^2 y,\\ Z_3 &= \omega^2 \cos\lambda(z\cos\lambda - x\sin\lambda). \end{aligned}$$

Dans son mouvement relatif par rapport à la Terre, le point mobile est donc soumis, par suite de son mouvement relatif et de l'attraction de la Terre, aux forces :

1° S'il s'agit de points extérieurs,

$$\begin{aligned} X &= -\frac{G}{R}x(1 - 3\sin^2\eta) - 3\omega^2 z\cos\alpha\sin\lambda\cos\eta\\ &\quad + 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt} + \omega^2\sin\lambda(x\sin\lambda - z\cos\lambda),\\ Y &= -\frac{G}{R}y + 2\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt} - 2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 y,\\ Z &= g + \frac{G}{R}z(2 - 3\sin^2\eta) - 3\omega^2 x\cos\alpha\sin\lambda\cos\eta - 2\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt}\\ &\quad + \omega^2\cos\lambda(z\cos\lambda - x\sin\lambda); \end{aligned}$$

2° S'il s'agit de points intérieurs,

$$\begin{aligned} X' &= -\frac{G}{R}x + 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt} + \omega^2\sin\lambda(x\sin\lambda - z\cos\lambda),\\ Y' &= Y,\\ Z' &= g - \frac{G}{R}z - 2\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt} + \omega^2\cos\lambda(z\cos\lambda - x\sin\lambda). \end{aligned}$$

Nous remarquerons que dans l'établissement de ces équations on a négligé les termes d'ordre supérieur à ω^3, il ne faudra donc pas pousser l'approximation au delà des termes en ω^3 ; de plus, η est de l'ordre de $\omega^2 R$, donc de l'ordre de $\omega^{\frac{1}{3}}$ et, par suite, $\frac{\eta^4}{R}$ sera de l'ordre de ω^3 et $\omega^2\eta^4$ de l'ordre $\omega^{3+\frac{1}{3}}$.

Il est facile, en partant de ces formules, de retrouver les résultats que j'ai donnés pour la déviation des corps dans la chute libre. Dans ce cas, en effet, y contient ω en facteur et x au moins ω^2 ;

$\frac{1}{R}$ étant de l'ordre $\omega^{\frac{5}{3}}$ on doit réduire les formules aux suivantes, en supposant que l'on se borne à calculer la déviation suivant OX dans le plan du méridien :

Pour la chute du haut d'une tour,

$$X = -3\omega^2 z \cos\alpha \sin\lambda \cos\eta + 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt} - \omega^2 z \sin\lambda \cos\lambda,$$

et, pour la chute dans un puits,

$$X' = 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt} - \omega^2 z \sin\lambda \cos\lambda.$$

Comme d'ailleurs une première approximation nous donne pour z, aux termes en $\omega^{\frac{5}{3}}$ près (1),

$$z = \frac{1}{2} g t^2,$$

et pour y, aux termes en $\omega^{2+\frac{2}{3}}$ près,

$$y = \frac{1}{3} \omega \cos\lambda\, g t^3,$$

nous aurons donc, aux termes en $\omega^{3+\frac{2}{3}}$ près,

$$X = \frac{3}{2} \omega^2 \sin\lambda \cos\lambda\, g t^2 - \frac{3}{2} \omega^2 \cos\alpha \sin\lambda \cos\eta\, g t^2,$$

$$X' = \frac{3}{2} \omega^2 \sin\lambda \cos\lambda\, g t^2.$$

Mais

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cos\eta &= \cos\eta(\cos\lambda \cos\eta + \sin\lambda \sin\eta) \\ &= \cos\lambda + \sin\eta(\sin\lambda \cos\eta - \cos\lambda \sin\eta) \\ &= \cos\lambda + \sin\eta \sin\alpha. \end{aligned}$$

On aura donc

$$X = -\frac{3}{2} \omega^2 \sin\lambda \sin\eta \sin\alpha\, g t^2$$

(1) $\frac{1}{R}$ étant de l'ordre de $\omega^{\frac{5}{3}}$.

ou, en tenant compte de la relation

$$\sin\eta = \frac{\omega^2 R \cos\alpha \sin\alpha}{g},$$

$$X = -\frac{3}{2}\omega^4 R t^2 \sin\lambda \sin^2\alpha \cos\alpha.$$

Si d'ailleurs on se borne à la partie principale, on remplace α par λ, puisque $\alpha = \lambda - \eta$. On a alors, pour la chute du haut d'une tour,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{3}{2}\omega^4 R t^2 \sin^2\lambda \cos\lambda,$$

d'où une déviation vers le nord donnée par la formule

$$x = -\frac{1}{8} R\omega^4 t^4 \sin^2\lambda \cos\lambda$$

ou, en introduisant la hauteur de chute $h = \frac{1}{2}gt^2$,

$$x = -\frac{1}{2}\frac{R\omega^4 h^2}{g^2}\sin^2\lambda \cos\lambda.$$

On a au lieu de cela, pour la chute dans un puits,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{3}{2}\omega^2 \sin\lambda \cos\lambda\, g t^2$$

et, par suite, on a une déviation vers le sud donnée par la formule

$$x = \frac{1}{8}\omega^2 \sin\lambda \cos\lambda\, g t^4$$

ou, en introduisant la hauteur de chute,

$$x = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 h^2}{g}\sin\lambda \cos\lambda.$$

Si l'on tenait compte de la forme elliptique du méridien terrestre on arriverait, dans tous les cas, à une déviation vers le sud, mais je n'aborderai pas cette étude, mon but ayant été de faire voir la manière dont on peut tenir compte, lorsqu'on veut garder les termes en ω^2, de la force centrifuge due à la rotation autour de OI, ainsi que de l'influence de l'angle η.