BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HADAMARD

Sur quelques questions de calcul des variations

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 73-80

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__73_0>

SUR QUELQUES QUESTIONS DE CALCUL DES VARIATIONS;

Par M. Hadamard.

Dans une Communication précédente ([1]) j'avais donné une condition nécessaire (correspondant à la condition de Legendre ou à celle de Weierstrass) pour le minimum d'une intégrale n^{uple} dans laquelle figurent m fonctions inconnues. J'avais ajouté que la méthode de Clebsch ([2]) fournissait une condition équivalente à la précédente pour $m = n = 2$ (l'équivalence étant douteuse pour les valeurs supérieures de m et de n) et qui était capable de jouer le rôle de la condition de Legendre-Weierstrass comme condition suffisante.

Ce dernier point n'était pas exact et, comme on va le voir, la question est loin d'être élucidée, même pour ce cas, le plus simple, de $m = n = 2$.

Soient z_1, z_2 les fonctions inconnues des variables x, y; p_1, q_1, p_2, q_2 leurs dérivées partielles. Toute condition analogue à celle de Legendre ou celle de Weierstrass pour le minimum faible (pour nous en tenir à ce cas) fait intervenir une certaine forme F, quadratique en p_1, q_1, p_2, q_2.

I. La condition *nécessaire* que nous avons obtenue précédemment est que F soit essentiellement positive pour toutes les valeurs (non nulles) des variables p_1, q_1, p_2, q_2 qui satisfont à la relation

$$p_1 q_2 - q_1 p_2 = 0. \tag{1}$$

II. La méthode de *Clebsch* donne comme condition *suffisante* que la forme quadratique

$$F + \lambda(p_1 q_2 - q_1 p_2) \tag{2}$$

(où λ est fonction de x et de y, mais non des p, q) soit définie positive. A cette condition doit, bien entendu, être jointe une *condition de Jacobi.*

([1]) Ce *Bulletin*, t. XXX, 1902, p. 253.
([2]) *Journal de Crelle*, t. 56, 1859.

Celle-ci, dans le cas actuel, consiste dans l'existence de deux solutions (ζ_1, ζ_2), (τ_1, τ_2) des *équations aux variations,* telles que le déterminant

$$\Delta = \zeta_1\tau_2 - \zeta_2\tau_1$$

ne s'annule pas dans le domaine d'intégration.

Si λ pouvait être choisi arbitrairement, la condition que $F + \lambda(p_1 q_2 - q_1 p_2)$ puisse être rendue définie par ce choix de λ serait équivalente à la condition nécessaire précédemment énoncée.

Mais tel n'est pas le cas. Ainsi qu'il résulte de l'analyse de Clebsch, les valeurs de λ sont déterminées par celles des solutions ζ, τ, ou, du moins, une fois ces solutions choisies, λ ne contient plus qu'une constante arbitraire C.

Il ne suffit donc pas que, pour chaque système de valeurs de x et de y, il existe des valeurs de λ qui rendent définie positive la forme (2). Soit

$$(3) \qquad \lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$$

l'intervalle qui comprend ces valeurs de λ. Il faudrait encore que l'on puisse déterminer la constante C de manière que, pour tous les couples de valeurs de x, y compris dans l'aire d'intégration, l'inégalité (3) soit vérifiée, autrement dit, que le minimum de la valeur de C déduite (en chaque point) de la relation $\lambda = \lambda_2$ ne soit pas inférieur au maximum de la valeur de C déduite de $\lambda = \lambda_1$.

Si même on prenait de toutes les manières possibles les solutions ζ, τ des équations aux variations, la fonction λ ne pourrait pas être prise à volonté. Elle satisferait à un système d'équations aux dérivées partielles S (vraisemblablement compliqué) résultant de l'élimination de ζ_1, ζ_2; τ_1, τ_2 entre les équations aux variations (au nombre de quatre pour les deux systèmes) et les deux relations qui définissent λ, les six équations ainsi écrites se réduisant d'ailleurs à cinq, grâce à ce fait que le système des équations aux variations est identique à son adjoint.

On serait alors conduit à la question suivante :

Existe-t-il une solution du système S *satisfaisant, dans toute l'aire d'intégration, aux inégalités* (3)?

Ce problème appartient à la même catégorie de questions dont celui que nous avons rencontré tout à l'heure offre un exemple simple, catégorie probablement assez digne d'attirer l'attention.

Bien entendu, une fois prise une telle solution λ, il faudrait calculer les solutions ζ, τ correspondantes et vérifier la condition de Jacobi $\Delta \gtrless 0$.

III. La méthode de *Hilbert* (dont la méthode de Clebsch n'est d'ailleurs pas distincte au fond) conduit à des résultats tout semblables.

Pour qu'une fonction de $x, y, z_1, z_2, p_1, p_2, q_1, q_2$, intégrée par rapport à x et à y, donne un résultat dépendant du contour seul, il faut tout d'abord qu'elle ait la forme

$$\varphi = A + B_1 p_1 + C_1 q_1 + B_2 p_2 + C_2 q_2 + D(p_1 q_2 - q_1 p_2)$$

(A, B, ... fonctions de x, y, z_1, z_2); forme qui renferme en général, comme on le voit, un terme non linéaire par rapport aux dérivées premières.

Pour suivre la marche indiquée par M. Hilbert, nous prendrons tout d'abord

$$(4)\qquad \begin{aligned}\varphi = f(x, y, z_1, z_2, \varpi_1, \chi_1, \varpi_2, \chi_2) &+ (p_1 - \varpi_1) f_{\varpi_1} + (p_2 - \varpi_2) f_{\varpi_2} \\ &+ (q_1 - \chi_1) f_{\chi_1} + (q_2 - \chi_2) f_{\chi_2},\end{aligned}$$

où f est la fonction donnée sous le signe $\int\int$, de manière que

$$\int\int(x, y, z_1, z_2, p_1, p_2, q_1, q_2)\, dx\, dy$$

est l'intégrale dont on cherche l'extremum, et où $\varpi_1, \varpi_2, \chi_1, \chi_2$ sont définies de la manière suivante :

On considère une famille d'extrémales dépendant de deux constantes arbitraires a, b

$$(5)\qquad z_1 = \Psi_1(x, y, a, b), \qquad z_2 = \Psi_2(x, y, a, b),$$

ces équations étant supposées résolubles par rapport à a, b, de sorte que le déterminant

$$(6)\qquad \frac{D(\Psi_1, \Psi_2)}{D(a, b)}$$

ne s'annule en aucun point de l'aire d'intégration.

Géométriquement parlant, les fonctions z_1, z_2 de x et de y représentent une multiplicité deux fois étendue tracée dans l'espace à quatre dimensions, ou, plus commodément, un couple de surfaces dans l'espace ordinaire, avec cette convention que l'on considère comme faisant un tout indissoluble les deux points qui, pris respectivement sur les deux surfaces, ont même projection sur le plan des xy (¹). Ce sont deux points ainsi situés sur une même parallèle à l'axe des z que nous nommerons un *couple* de points. La condition imposée aux extrémales (5) revient à dire qu'on peut les faire passer par tout couple de points donné (suffisamment voisin de l'extrémale que l'on considère).

Cela posé, ϖ_1, χ_1, ϖ_2, χ_2 sont les dérivées partielles de z_1, z_2 tirées des équations (5). Ce sont donc des fonctions de x, y, a, b et par conséquent (en vertu de la résolubilité précédemment postulée) de fonctions de x, y, z_1, z_2, de sorte que l'expression (4) est une fonction de x, y, z_1, z_2, p_1, q_1, p_2, q_2.

Le calcul fait intervenir plusieurs espèces de dérivées, savoir :

1° Les dérivées d'une fonction de x, y, z_1, z_2, p_1, q_1, p_2, q_2, lorsque ces huit quantités sont considérées comme des variables indépendantes; nous les désignons par des indices, Φ_{p_1} désignant, par exemple, la dérivée de Φ par rapport à p_1. C'est ce qui est fait dans la formule (4), où f_{ϖ_1} représente la valeur de f_{p_1} lorsqu'on y remplace p_1, p_2, q_1, q_2 par ϖ_1, ϖ_2, χ_1, χ_2.

2° Les dérivées d'une fonction de x, y, z_1, z_2 par rapport à ces quantités considérées comme variables indépendantes. Nous les désignerons par le symbole δ. Pour une fonction Φ de x, y, z_1, z_2, ϖ_1, χ_1, ϖ_2, χ_2 on a

$$(7)\quad \frac{\delta\Phi}{\delta z_i} = \Phi_{z_i} + \Phi_{\varpi_1}\frac{\delta\varpi_1}{\delta z_i} + \Phi_{\varpi_2}\frac{\delta\varpi_2}{\delta z_i} + \Phi_{\chi_1}\frac{\delta\chi_1}{\delta z_i} + \Phi_{\chi_2}\frac{\delta\chi_2}{\delta z_i} \qquad (i = 1, 2).$$

3° Les dérivées prises suivant le couple de surfaces (quelconque d'ailleurs) dont les plans tangents ont pour coefficients angulaires p_1, q_1, p_2, q_2. Nous les désignerons par le symbole ∂; on a (pour

(¹) En particulier, ces surfaces sont limitées à deux contours donnés C_1, C_2, lesquels font partie d'un même cylindre parallèle à l'axe des z.

une fonction de x, y, z_1, z_2)

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\delta}{\delta x} + p_1\frac{\delta}{\delta z_1} + p_2\frac{\delta}{\delta z_2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\delta}{\delta y} + q_1\frac{\delta}{\delta z_1} + q_2\frac{\delta}{\delta z_2}. \end{aligned}\right.$$

4° Les dérivées prises suivant les extrémales (4), en regardant, par conséquent, z_1, z_2 comme fonctions de x, y et a, b comme constants. Ces dérivées, qui seront désignées par le symbole $\mathfrak{d}$, sont liées aux dérivées δ par la relation

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}x} &= \frac{\delta}{\delta x} + \varpi_1\frac{\delta}{\delta z_1} + \varpi_2\frac{\delta}{\delta z_2}, \\ \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}y} &= \frac{\delta}{\delta y} + \chi_1\frac{\delta}{\delta z_1} + \chi_2\frac{\delta}{\delta z_2}. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, les conditions pour que, φ étant l'expression (4), l'intégrale $\int\int \varphi\, dx\, dy$ ne dépende que du contour, soit

$$\frac{\delta\varphi}{\delta z_1} - \frac{\partial}{\partial x}\varphi_{p_1} - \frac{\partial}{\partial y}\varphi_{q_1} = 0, \qquad \frac{\delta\varphi}{\delta z_2} - \frac{\partial}{\partial x}\varphi_{p_2} - \frac{\partial}{\partial y}\varphi_{q_2} = 0$$

(égalités devant avoir lieu quels que soient les p, q) se réduisent, en tenant compte des formules (8) et de ce que les surfaces (5) sont des extrémales, à

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta z_2} f_{\varpi_1} - \frac{\delta}{\delta z_1} f_{\varpi_2} &= 0, \\ \frac{\delta}{\delta z_2} f_{\chi_1} - \frac{\delta}{\delta z_1} f_{\chi_2} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Elles ne seront donc pas vérifiées en général.

Mais si (ce que nous avons le droit de faire) nous ajoutons à f les deux termes intégrables

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\mu p_1 z_2) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu q_1 z_2) &= \frac{\partial \mu}{\partial y} p_1 z_2 - \frac{\partial \mu}{\partial x} q_1 z_2 + \mu(p_1 q_2 - q_1 p_2) \\ &= \frac{\delta \mu}{\delta y} p_1 z_2 - \frac{\delta \mu}{\delta x} q_1 z_2 + \lambda(p_1 q_2 - q_1 p_2) \end{aligned}$$

(μ étant une fonction de x, y, z_1, z_2 et λ désignant la combinaison

$$\lambda = \mu + z_2\frac{\delta\mu}{\delta z_2}\Big),$$

ou encore si, sans changer f, nous ajoutons à l'expression (4) le terme

$$-\lambda[(p_1-\varpi_1)(q_2-\chi_2)-(p_2-\varpi_2)(q_1-\chi_1)],$$

les équations (10) sont remplacées par

$$(10')\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta z_2} f_{\varpi_1} - \frac{\delta}{\delta z_1} f_{\varpi_2} + \lambda\left(\frac{\delta\chi_1}{\delta z_1} + \frac{\delta\chi_2}{\delta z_2}\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0,\\ &\frac{\delta}{\delta z_2} f_{\chi_1} - \frac{\delta}{\delta z_1} f_{\chi_2} + \lambda\left(\frac{\delta\varpi_1}{\delta z_1} + \frac{\delta\varpi_2}{\delta z_2}\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0,\end{aligned}\right.$$

et, pour satisfaire aux conditions du problème, nous n'aurons qu'à déterminer λ par ces dernières équations.

Or celles-ci ne seront autres que les équations posées par Clebsch. Il suffit, pour les ramener à la forme de Clebsch, de transformer les dérivées δ en remplaçant les variables indépendantes z_1, z_2 par les variables a, b. Les dérivées des unes par rapport aux autres sont les quantités précédemment désignées par ζ_1, ζ_2, τ_1, τ_2, et le déterminant fonctionnel (6) est celui que nous avions appelé Δ.

Comme dans la méthode de Clebsch, par conséquent, les équations (10') forment un système complètement intégrable et ont, par conséquent, une solution λ dépendant d'une constante arbitraire.

Nous sommes donc amenés exactement au même point que dans la méthode précédente et nous aurions à étudier un système analogue à S (mais notablement plus compliqué et plus difficile à former, puisque les équations ne seraient plus linéaires) obtenu en éliminant z_1, z_2 entre les équations (10') et celles qui expriment que la famille (5) est composée d'extrémales. Nous devrons exprimer que ce système admet une solution satisfaisant aux inégalités (3).

IV. En réalité, on doit présumer que la discussion dont nous venons de parler n'est pas nécessaire.

Si, en effet, nous considérons, non plus la méthode de Hilbert, mais la méthode de *Weierstrass* sous sa forme primitive, nous arriverons à des conclusions d'une forme notablement différente.

Soient, en effet, (s_1, s_2) le couple de surfaces qui constitue l'extrémale étudiée; (S_1, S_2) un autre couple qu'on veut lui comparer, et qui est limité au même contour (C_1, C_2). Sur (S_1, S_2) traçons un couple de contours variables (γ_1, γ_2) (γ_1 et γ_2 étant, bien entendu, situés sur un même cylindre parallèle à Ox). Par (γ_1, γ_2) faisons passer un couple de surfaces (Σ_1, Σ_2) constituant une *extrémale*. Si cette dernière construction est toujours possible, il suffira de faire varier les contours γ_1, γ_2 depuis un couple de points jusqu'à la position (C_1, C_2) pour appliquer le raisonnement de Weierstrass.

Or la condition, analogue à celle de Legendre, à laquelle on arrive ainsi (pour le minimum faible) est la condition *nécessaire*, rappelée en premier lieu.

Seulement, en opérant ainsi, la difficulté apparaît dans la condition de Jacobi. Au lieu de supposer simplement l'existence d'une famille d'extrémales à deux paramètres, il faudrait exprimer que l'on peut construire le couple extrémal (Σ_1, Σ_2), c'est-à-dire résoudre un problème de Dirichlet à deux inconnues dans les conditions les plus générales et les plus difficiles, puisque γ_1 et γ_2 sont quelconques.

L'état actuel de la Science ne permettrait pas, par exemple, de déduire de cette méthode l'existence du minimum dans une aire d'intégration très petite; ce qui résulte, au contraire, des méthodes de Clebsch-Hilbert, puisque, en raison de la constante arbitraire qui figure dans λ, on peut toujours supposer que cette quantité satisfait aux inégalités (3) aux environs d'un point donné quelconque.

Je terminerai en indiquant quelques points sur lesquels, dans les leçons professées au Collège de France il y a deux ans, j'ai dû compléter les résultats acquis en Calcul des variations.

Le premier concerne les *problèmes isopérimétriques,* dans lesquels on cherche l'extremum d'une certaine intégrale I_0, connaissant les valeurs d'une ou plusieurs autres intégrales données et certaines conditions accessoires. Le résultat fondamental (qui ramène cet extremum à un extremum libre par l'intervention d'un multiplicateur) a dû être étendu au cas où, parmi les conditions accessoires, figurent des conditions d'inégalité. Il reste encore vrai dans ce cas; mais la démonstration fait appel à des considérations sensiblement différentes des considérations classiques.

D'autre part, la question de savoir si la *construction de Weierstrass* est possible, dans ce même problème isopérimétrique, peut, dans beaucoup de cas, être considérée comme résolue si l'arc considéré satisfait aux conditions suffisantes du minimum (par exemple) pour l'intégrale $I_0 + l I_1$ (I_1 étant l'intégrale donnée et l le multiplicateur), ce minimum étant considéré comme libre. On constate, en effet, dans ces conditions, que la valeur de $I_0 + l I_1$ est une fonction croissante de l lorsque cette quantité varie pendant que les extrémités restent fixes. Cette remarque sera, par exemple, très utile pour la démonstration de l'existence du minimum dans une région suffisamment petite.

Enfin je noterai encore une simplification assez grande que l'on peut apporter à la démonstration du théorème de M. Osgrod, d'après lequel on peut assigner une limite inférieure à la différence qui existe entre l'intégrale minima et une intégrale variée. Un procédé, tout semblable à celui qui a été employé par M. Kneser à propos de la stabilité de l'équilibre du fil pesant, permet de se passer des inégalités employées dans les différentes démonstrations directes données jusqu'ici. Malheureusement, cette méthode n'est plus applicable aux intégrales multiples, pour lesquelles, au surplus, la question est toujours beaucoup plus délicate.

Je me contenterai de mentionner ces différents points, qui seront traités avec plus de détails dans un Ouvrage ultérieur.