BULLETIN DE LA S. M. F.

J. CLAIRIN

Sur certaines transformations des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 90-97

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__90_0>

SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

Par M. J. Clairin.

J'ai déterminé, dans un travail antérieur [1], toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, réductibles à une équation linéaire par une transformation de Bäcklund de seconde espèce, qui conserve les variables indépendantes, et qui fasse correspondre à chaque intégrale de l'équation considérée une seule intégrale de l'équation linéaire. Je me propose d'étudier les transformations (B_2) qui permettent de remplacer une équation aux dérivées partielles du second ordre par une équation linéaire, en faisant correspondre à chaque intégrale de l'équation donnée une infinité d'intégrales de l'équation linéaire, les variables indépendantes étant toujours conservées; je montrerai que, exception faite de deux cas particuliers, les seules transformations satisfaisant aux conditions énoncées sont les transformations indiquées par Moutard et M. Lucien Lévy.

Considérons une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre que nous pouvons toujours écrire, avec les notations ordinaires,

$$s = ap + bz, \tag{1}$$

a et b désignant deux fonctions des variables indépendantes x et y; la question proposée revient à celle-ci : *Trouver dans quels cas la fonction z' de x et y définie par l'égalité*

$$z' = f(x, y, z, p) \tag{2}$$

satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre quand on remplace z par une intégrale de l'équation (1).

---

(1) *Annales de la Faculté de Toulouse*, 1903.

On tire immédiatement de l'égalité précédente

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z'}{\partial x} = p' = \dfrac{\partial f}{\partial x} + p\dfrac{\partial f}{\partial z} + r\dfrac{\partial f}{\partial p}, \\[2ex] \dfrac{\partial z'}{\partial y} = q' = \dfrac{\partial f}{\partial y} + q\dfrac{\partial f}{\partial z} + (ap+bz)\dfrac{\partial f}{\partial p}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 z'}{\partial x\,\partial y} = s' = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + p\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} + (ap+bz)\left(\dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial p} + p\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p}\right) \\[2ex] \qquad + \left[\left(b + \dfrac{\partial a}{\partial x}\right)p + \dfrac{\partial b}{\partial x}z\right]\dfrac{\partial f}{\partial p} + q\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + p\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) \\[2ex] \qquad + r\left[a\dfrac{\partial f}{\partial p} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial p} + (ap+bz)\dfrac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right] + qr\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p}. \end{cases}$$

On peut remarquer que f doit dépendre effectivement des deux variables z et p. Si f était indépendant de p, (2) définirait une transformation ponctuelle de l'équation (1); si f ne contenait pas z, z' satisferait à une équation déduite par un changement de fonction inconnue de l'une des équations obtenues en appliquant à (1) la transformation de Laplace.

Les deux premières équations (3) sont donc résolubles par rapport à q et à r; en portant les valeurs trouvées dans la dernière équation, il vient

$$s' = \mathrm{H}(x, y, z, p)p'q' + \mathrm{K}(x, y, z, p)p' + \mathrm{L}(x, y, z, p)q' + \mathrm{M}(x, y, z, p).$$

z' satisfera à une équation aux dérivées partielles du second ordre si H, K, L, M peuvent s'exprimer à l'aide de (2) en fonction de x, y, z' et cette équation sera nécessairement de la forme

$$s' = \mu(x, y, z')p'q' + \alpha(x, y, z')p' + \beta(x, y, z')q' + \gamma(x, y, z').$$

En prenant pour fonction inconnue $\int e^{\int -\mu\, dz'}dz'$ au lieu de z', on revient au cas où μ est nul : supposons cette transformation effectuée. $\mathrm{H}(x, y, z, p)$ s'annulant en même temps que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p}$, on devra avoir

$$z' = f(x, y, z, p) = \varphi(x, y, z) + \psi(x, y, p).$$

$\mathrm{L}(x, y, z, p)$ sera une fonction de x, y, z' seulement si le déterminant fonctionnel $\dfrac{\mathrm{D}(\mathrm{L}, f)}{\mathrm{D}}$ est nul; remplaçons L par sa valeur

$\dfrac{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} + p\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}}$, cette condition s'écrit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial p}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z} + p\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}}\right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{4}$$

Donnons à z une valeur fixe; on tire de là

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{m(x,y)}{p + \omega(x,y)}$$

et

$$\psi(x,y,p) = m(x,y)\operatorname{Log}[p + \omega(x,y)] \quad (^1),$$

à moins que, dans le déterminant (4), le coefficient de p ne soit nul ou que ce déterminant ne s'annule identiquement quelle que soit ψ. Examinons ces deux dernières hypothèses : le déterminant ne contient pas de terme dépendant de p si l'on a

$$\varphi(x,y,z) = v(x,y)e^{u(x,y)z} + w(x,y) \qquad (u, v \neq 0), \tag{5}$$

ou si φ est une fonction linéaire de z. Il ne peut arriver que φ ait la forme (5); en substituant dans le déterminant écrit plus haut, on verrait que, dans ce cas, $\dfrac{\partial \psi}{\partial p}$ dépendrait de z. Le déterminant est identiquement nul si φ est une fonction linéaire de z.

Calculons le coefficient de p',

$$K(x,y,z,p) = a + \frac{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial p} + (ap + bz)\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial p^2}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial p}},$$

et écrivons encore que le déterminant $\dfrac{D(K,f)}{D(z,p)}$ s'annule identiquement. Nous trouvons

$$b\frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial p} + (ap + bz)\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial p^2}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial p}}\right] = 0. \tag{6}$$

---

(1) Il est évidemment inutile d'ajouter à l'expression trouvée pour ψ une fonction de x et y, puisqu'on peut toujours retrancher une pareille fonction de z'.

Nous négligeons d'abord le cas où le coefficient b serait nul.

En donnant à p une valeur fixe, on trouve

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{n(x,y)}{z+\xi(x,y)},$$
$$\varphi(x,y,z) = n(x,y)\operatorname{Log}[z+\xi(x,y)],$$

si z figure dans l'équation (6). Abstraction faite du cas où ψ est une fonction linéaire et où, par conséquent, le premier membre de (6) s'annule identiquement, z ne figure pas dans cette équation si l'on a

$$\psi(x,y,p) = v_0(x,y)e^{u_0(x,y)p} + w_0(x,y) \qquad (u_0, v_0 \neq 0);$$

en remplaçant ψ par cette fonction, il vient pour $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ une expression contenant p, ce qui est impossible.

En résumé, il n'y a que deux cas à considérer : φ et ψ sont respectivement égales à

$$n(x,y)\operatorname{Log}[z+\xi(x,y)], \qquad m(x,y)\operatorname{Log}[p+\omega(x,y)],$$

ou contiennent linéairement les quantités z et p.

Considérons d'abord le premier cas : portons dans l'équation (4) les expressions que nous venons de trouver pour φ et ψ; il reste, après réductions,

$$m\left(p+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) + n(p+\omega) = 0.$$

Les fonctions m et n ne diffèrent donc que par le signe, en prenant $\frac{z'}{m(x,y)}$ pour nouvelle fonction inconnue, on voit que l'on peut supposer m égale à 1 et n égale à -1. L'équation précédente donne, en outre,

$$\omega = \frac{\partial\xi}{\partial x}.$$

Remplaçons dans l'équation linéaire (1) z par $z-\xi(x,y)$, elle devient

$$s + ap + bz + \sigma(x,y) = 0,$$

dans cette dernière équation remplaçons z par e^{z_1}, nous trouvons

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial y} + a\frac{\partial z_1}{\partial x} + b + \sigma e^{-z_1} = 0,$$

l'équation qui définit la transformation étant

$$z' = \log\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right).$$

D'après la forme de l'équation (7), $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ et par conséquent z' ne satisferont à des équations aux dérivées partielles du second ordre que si $\sigma(x, y)$ est nulle (1), c'est-à-dire si ξ est une intégrale de l'équation (1). Il en résulte que l'on a

$$z' = \text{Log}\left[\frac{p + \frac{\partial \xi}{\partial x}}{z + \xi(x, y)}\right],$$

ou simplement

$$z' = \text{Log}\left(\frac{p}{z}\right),$$

si l'on remplace z par $z - \xi(x, y)$, ce qui ne change pas l'équation (1). On trouve donc ainsi les transformations indiquées par Moutard.

Passons au cas où φ et ψ dépendent linéairement de z et de p, il existe toujours des fonctions θ, η, ζ de x et y telles que l'on puisse écrire

$$z' = \theta(x, y)\frac{\partial\left[\frac{z}{\eta(x, y)}\right]}{\partial x} + \zeta(x, y);$$

tout revient à chercher si $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{\eta}\right)$ satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre. $\frac{z}{\eta} = z_1$ est une intégrale de

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} + \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + a\right)\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial y} + \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}a + b\right)z_1 = 0.$$

$\frac{\partial z_1}{\partial x}$ satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre si, dans l'équation qui vient d'être écrite, le rapport des coefficients de z_1 et de $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ ne dépend que de y (2); écrivons cette con-

(1) GOURSAT, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 244.

(2) GOURSAT, *loc. cit.*

dition

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + b\eta_1 = \mathrm{Y}\frac{\partial \eta_1}{\partial x}.$$

Remplaçons $\eta(x, y)$ par $\eta_1(x, y)\int \mathrm{Y}\,dy$; on aperçoit immédiatement que η_1 est une intégrale de l'équation linéaire donnée; la transformation considérée est une transformation de M. Lucien Lévy, puisqu'elle équivaut à la transformation

$$z' = \eta_1 p - \frac{\partial \eta_1}{\partial x} z.$$

Lorsque b est nul, nous écrirons l'équation linéaire sous la forme suivante,

$$(8) \qquad s = \frac{1}{a_0}\frac{\partial a_0}{\partial y} p,$$

a_0 désignant une fonction de x et y. De la condition (6) on déduit que l'on a

$$\psi(x, y, p) = m(x, y)\,\Psi\left(x, \frac{p}{a_0}\right) + n(x, y) \quad (^1),$$

ou simplement

$$\psi(x, y, p) = \Psi\left(x, \frac{p}{a_0}\right),$$

si l'on effectue un changement d'inconnue dans l'équation transformée, comme nous avons fait plusieurs fois. Nous supposons d'abord que φ ne contient pas linéairement z, l'équation (4) nous permet de déterminer la forme de la fonction Ψ,

$$\Psi\left(x, \frac{p}{a_0}\right) = \mathrm{Log}\left[\frac{p}{a_0} + \mathrm{X}'(x)\right],$$

en négligeant toujours, ce qui est permis, un facteur indépendant de p et un terme additif également indépendant de p. L'équation (4) fournit alors le système

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\,\partial x} &= a_0 \mathrm{X}'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + \rho(x, y)\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + \tau(x, y)\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

(1) Il est bien évident que les fonctions m et n n'ont aucune relation avec celles qui ont été représentées plus haut par les mêmes lettres. Il en est de même pour les fonctions désignées plus loin par η et ω.

qui est intégrable à condition que l'on ait

$$\rho = a_0(x, y)\,X'(x)\,Y(y), \qquad \tau = Y(y).$$

En écrivant que $\dfrac{D(M, f)}{D(z, p)}$ est nul et en tenant compte de (9), on arrive à

$$\frac{\partial}{\partial y}(a_0 Y) = 0, \tag{10}$$

ce qui signifie que Y est nulle, à moins que l'équation (8) n'ait ses deux invariants nuls.

Si Y est nulle, la deuxième équation (9) montre que l'on peut écrire

$$\varphi(x, y, z) = -\operatorname{Log}[z + \omega(x, y)];$$

en recommençant les raisonnements faits plus haut, on montre que l'on obtient une transformation de Moutard.

Lorsque l'équation (8) a ses deux invariants nuls, il est permis de supposer a_0 égale à 1 : de (10) on déduit que Y est une constante que nous pouvons remplacer par l'unité. Le système (9) donne alors

$$\varphi(x, y, z) = -\operatorname{Log}(e^{z+X} - 1);$$

finalement, en écrivant partout $z - X$ au lieu de z, on trouve

$$z' = \operatorname{Log}\left(\frac{p}{e^z - 1}\right);$$

cette transformation permet de passer de l'équation

$$s = 0 \quad \text{à} \quad s' + q' e^{z'} = 0.$$

Pour terminer, il reste à examiner le cas où φ est linéaire en z, l'équation donnée ayant toujours la forme (8). On a alors

$$z' = \eta(x, y)\,z + \Psi\left(x, \frac{p}{a_0}\right), \tag{11}$$

et l'on en tire

$$q' = \frac{\partial \eta}{\partial y} z + \eta q, \qquad s' = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y} z + \frac{\partial \eta}{\partial y} p + \frac{\partial \eta}{\partial x} q + \frac{\eta}{a_0} \frac{\partial a_0}{\partial y} p,$$

puis, en remplaçant q par sa valeur,

$$s' - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} q' = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\eta}{a_0} \frac{\partial a_0}{\partial y}\right) p + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) z. \tag{12}$$

Imaginons que, dans le second membre de cette dernière équation, les coefficients de z et p ne soient pas nuls; si l'on exprime que ce second membre ne dépend que de x, y, z', en vertu de (11) on trouve que Ψ est une fonction linéaire de p et que l'on a une transformation de M. Lucien Lévy. En écrivant, au contraire, que le second membre de (12) est identiquement nul, on trouve que a_0 satisfait à

$$a_0 \frac{\partial^2 a_0}{\partial x \, \partial y} - \frac{\partial a_0}{\partial x} \frac{\partial a_0}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire que l'équation (8) a ses deux invariants nuls, ou encore que l'on peut supposer a_0 égale à 1. η est alors une fonction de la seule variable x et un changement simple d'inconnue dans l'équation transformée permet de remplacer (11) par

$$z' = z + g(x, p);$$

les deux équations qui se correspondent sont

$$s = 0, \qquad s' = 0.$$

En rapprochant les résultats qui viennent d'être établis de ceux que j'ai démontrés dans mon travail déjà cité des *Annales de la Faculté de Toulouse*, on voit que l'on connaît toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre, qu'on peut remplacer par une équation linéaire à l'aide d'une transformation de Bäcklund de deuxième espèce, tout en conservant les variables indépendantes. Si l'on supprime cette dernière condition, le problème est beaucoup plus compliqué; j'ai déterminé quelques équations qui sont déduites d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre par une transformation (B_2) [1], je me bornerai à indiquer ici qu'en appliquant une transformation (B_1) aux équations que j'ai indiquées dans les *Annales de la Faculté de Toulouse*, on obtient de nouvelles équations jouissant de la propriété énoncée.

---

[1] *Comptes rendus*, 27 juin 1904.