BULLETIN DE LA S. M. F.

A. DENJOY

Sur quelques propriétés des fonctions de variables réelles

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 98-114
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__98_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES;

Par M. Arnaud Denjoy.

Soit f une fonction définie en chaque point d'un ensemble parfait quelconque P. On sait ce que l'on entend par maximum et minimum de la fonction f en un point de cet ensemble et relativement à cet ensemble. Désignons par A et I ces deux fonctions qui sont définies en chaque point de P. La fonction A est semi-continue supérieurement, la fonction I semi-continue inférieurement.

La fonction A, qui est à elle-même son propre maximum, possède un minimum. Je le désigne par A'. La fonction semi-continue inférieurement A' possède un maximum. Je le désigne par A''. Je désigne de même le minimum de A'' par A''', et ainsi de suite. Je désigne d'une façon entièrement analogue les fonctions I', I'', I''', ..., qui se déduisent de I. I' est le maximum de la fonction semi-continue inférieurement I. I'' est le minimum de la fonction semi-continue supérieurement I'. I''' est le maximum de I'', etc.

Je démontre dès le début de cette Note que les fonctions de rang impair A', A''', ... coïncident entre elles, et aussi I', I''', ..., et qu'il en est de même des fonctions de rang pair A'', A^{IV}, ..., d'une part, et I'', I^{IV}, ..., d'autre part. Ce fait étant acquis :

1° Je donne les propriétés-définitions, caractéristiques des quatre fonctions A', A'', I', I'', et qui les relient directement à f;

2° Je cherche si, par leurs propriétés, ces fonctions peuvent servir à caractériser une fonction f à laquelle elles appartiennent. Je trouve effectivement une relation, savoir $A' = I''$, $A'' = I'$, vérifiée sur tout ensemble parfait qui caractérise les fonctions limites de fonctions continues, ou de classe 1, suivant la terminologie de M. Baire;

3° J'ai cherché si, parmi ces fonctions, certaines conservent leurs propriétés à la limite; autrement dit, f_n étant une fonction tendant vers une fonction f, j'ai cherché si les fonctions a'_n, a''_n, i'_n, i''_n, relatives à f_n, tendent vers les fonctions A', A'', I', I'', relatives à la fonction f limite de f_n. Il n'en est rien, comme il est bien aisé de s'en convaincre par des exemples immédiats. Mais j'ai pu trouver des inégalités reliant les quantités A', A'', I', I'', et les limites a', a'', i', i'' des fonctions a'_n, a''_n, i'_n, i''_n dans le cas où ces limites existent. J'ai, à ce propos, énoncé un théorème général sur la façon dont s'opère la convergence d'une fonction tendant vers une fonction limite.

I.

En vue de simplifier l'exposition, je supposerai le plus souvent que l'ensemble parfait P, sur lequel sont définies les fonctions, est le continu linéaire. Mais, toutes les définitions et tous les résultats subsistent dans le cas où l'ensemble parfait P est quelconque. Il suffit de remplacer le mot *point* par *point de* P, le mot *intervalle* par *intervalle contenant des points de* P, les mots *point intérieur à un intervalle* par *point de* P *intérieur à un intervalle,* et cela dans les définitions, énoncés et démonstrations. On se rendra très aisément compte que, sous leur nouvelle forme, ceux-ci sont encore valables.

Soit donc f une fonction définie sur le continu linéraire P. Rappelons les propriétés caractéristiques du maximum A et du minimum I de f.

H étant un point quelconque de P et étant donné un nombre positif ε quelconque :

A. — 1° Je puis trouver un intervalle CD entourant le point considéré H et en chaque point duquel on a

$$f < A(\mathrm{H}) + \varepsilon;$$

2° Quelque petit que soit CD entourant H, il y a à son intérieur un point (pouvant coïncider avec H) où $f > A(\mathrm{H}) - \varepsilon$.

L'ensemble de ces deux propriétés montre que le nombre $A(\mathrm{H})$ est le plus petit jouissant de la propriété 1° et le plus grand jouissant de la propriété 2°. Ces propriétés sont donc caractéristiques de $A(\mathrm{H})$, c'est-à-dire que tout nombre jouissant de toutes les deux à la fois coïncide forcément avec A.

Pour I, définitions analogues :

I. — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD entourant H, en chaque point duquel $f > I(\mathrm{H}) - \varepsilon$;

2° Quelque petit que soit CD contenant H à son intérieur, il existe dans CD un point où $f < I(\mathrm{H}) + \varepsilon$.

$I(\mathrm{H})$ est le plus grand nombre jouissant de la propriété 1° et le plus petit jouissant de la propriété 2°. L'ensemble de ces propriétés caractérise donc I.

Ceci posé, je vais démontrer les égalités

$$A' = A''' = A_5 = \ldots = A_{2n+1},$$
$$A'' = A^{\text{IV}} = A_6 = \ldots = A_{2n+2}$$

et les inégalités analogues relatives à I', I'', I''', ... Remarquons que les premières se ramènent à l'égalité $A' = A'''$. Car la fonction qui joue, par rapport à A''', le rôle que A''' joue par rapport à A', est A_5. Si donc A' et A''' sont identiques, $A''' = A_5$, et ainsi de suite, pour les fonctions d'indice impair. Mais, si toutes les fonctions d'indice impair sont identiques, leurs maxima sont aussi identiques. Or, ces maxima ne sont autres que A'', A^{IV}, ... Donc, les deux suites d'égalités écrites se ramènent à $A' = A'''$. De même les égalités relatives aux I', I'', I''', ... se ramènent à $I' = I'''$. Pour démontrer ces deux dernières, j'aurai besoin du lemme suivant :

LEMME. — *Si $f \geqq g$, le maximum et le minimum de f en chaque point sont respectivement supérieurs ou égaux au maximum et au minimum de g au même point.*

Soient A_1 le maximum et I_1 le minimum de f; A_2 et I_2 le maximum et le minimum de g. Je veux montrer que $f \geqq g$ entraîne $A_1 \geqq A_2$, $I_1 \geqq I_2$. Soit, en effet, H un point quelconque de P. Quel que soit le nombre positif ε donné : Il est possible de trouver un intervalle CD contenant H à son intérieur (A, 1°), en tout point duquel on a

$$f < A_1(\mathrm{H}) + \varepsilon,$$

et, par suite,

$$g < A_1(\mathrm{H}) + \varepsilon.$$

Donc,

$$A_2 \leqq A_1.$$

En second lieu, quel que soit CD contenant H à son intérieur, il est possible d'y trouver un point où (I, 2°)

$$f < I_1(\mathrm{H}) + \varepsilon,$$

et, par suite,

$$g < I_1(\mathrm{H}) + \varepsilon.$$

Donc,

$$I_2 \leqq I_1.$$

En résumé, les inégalités $f > g$ ou $f \geqq g$ entraînent les suivantes :

$$A_1 \geqq A_2, \qquad I_1 \geqq I_2.$$

Lorsque dans une inégalité ou dans une égalité nous remplacerons les deux membres par leurs maxima ou leurs minima respectifs, nous dirons que nous *délimitons* les deux membres de la relation, supérieurement dans le premier cas, inférieurement dans le second.

Ceci posé, démontrons l'égalité

$$A' = A'''.$$

Pour cela, je remarque que j'ai $A \geqq A'$, puisque A' est le minimum de A, et $A'' \geqq A'$, puisque A'' est le maximum de A'. Délimitons la première inégalité supérieurement,

$$A \geqq A''.$$

Donc,

$$A \geqq A'' \geqq A'.$$

Délimitons inférieurement les trois termes de cette double relation,

$$A' \geqq A''' \geqq A'.$$

Donc,

$$A' = A'''. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On démontrerait pareillement que

$$I' = I'''.$$

Ainsi. la fonction A' semi-continue inférieurement jouit de la propriété d'être le minimum de son maximum A''. De même, I' est une fonction semi-continue supérieurement qui est le maximum de son minimum I''.

On peut se demander dans quel ordre de grandeur sont rangées les six fonctions A, A', A'', I, I', I''.

On a d'abord

$$A \geqq A'' \geqq A'$$

et, de même,

$$I' \geqq I'' \geqq I.$$

De $A \geqq I$ je déduis, en délimitant inférieurement,

$$A' \geqq I$$

et, en délimitant supérieurement,

$$A'' \geqq I'.$$

Donc

$$A \geqq A'' \geqq I'.$$

On a donc l'ordre suivant, par raison de symétrie :

$$A \geqq A'' \geqq \begin{matrix} I' \\ A' \end{matrix} \geqq I'' \geqq I.$$

A, A'', I' sont semi-continues supérieurement, A', I'', I le sont inférieurement. Il est d'ailleurs très aisé de former des exemples où A' et I' sont dans un ordre de grandeur constant et quelconque, ou indifférent.

Remarquons encore que ces inégalités ont été déduites, seulement, de ce que A est semi-continue supérieurement, I semi-continue inférieurement avec $A \geqq I$, et non pas de ce que A et I sont l'un le maximum, l'autre le minimum d'une même fonction.

Donnons des définitions caractéristiques de A', A'', I', I''. Soit H un point quelconque de P. Quel que soit le nombre positif ε donné :

A'. — A' étant le minimum de A, il est possible (I, 1°) d'entourer H d'un intervalle CD en chaque point M duquel $A(M) > A'(H) - \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Autour de chaque point M de CD (A, 2°), je peux construire un intervalle dans lequel il y a un point où $f > A(M) - \frac{\varepsilon}{2}$. En ajoutant ces inégalités, on voit que :

1° Il est possible d'entourer H d'un intervalle CD dans lequel l'ensemble des points où $f > A'(H) - \varepsilon$ est partout dense.

Dans tout intervalle CD contenant H, je peux trouver (I, 2°) un point M (pouvant coïncider avec H) où $A(M) < A'(H) + \frac{\varepsilon}{2}$. Autour de M, je peux trouver (A, 1°) un intervalle en chaque point duquel $f < A(M) + \frac{\varepsilon}{2}$. Donc :

2° Dans tout intervalle CD contenant H existe un intervalle en chaque point duquel j'ai $f < A'(H) + \varepsilon$.

$A'(H)$ est le plus grand nombre jouissant de la propriété 1° et le plus petit jouissant de la propriété 2°. L'ensemble de ces propriétés est donc caractéristique de A'.

A''. — A'' est le maximum de A'. Donc je peux trouver un intervalle CD contenant H en chaque point M duquel j'ai

$$A'(M) < A''(H) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dans tout intervalle contenant M existe un intervalle en chaque point duquel j'ai $f < A'(M) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc, les intervalles en chaque point desquels j'ai $f < A''(H) + \varepsilon$ forment un ensemble partout dense dans CD. Donc :

1° Il est possible de trouver un intervalle CD contenant H et tel que l'ensemble des points où $f > A''(H) + \varepsilon$ est non dense partout sur CD.

Dans tout intervalle CD contenant H, je peux trouver un point M où $A'(M) > A''(H) - \frac{\varepsilon}{2}$. Autour de M, je peux trouver un intervalle sur lequel l'ensemble des points où $f > A'(M) - \frac{\varepsilon}{2}$ est partout dense. Donc :

2° Dans tout intervalle CD contenant H, il existe un intervalle sur lequel l'ensemble des points où $f > A''(H) - \varepsilon$ est partout dense.

Le nombre $A''(\mathrm{H})$ est le plus petit jouissant de la propriété 1° et le plus grand jouissant de la propriété 2°. Donc, ces propriétés caractérisent A''.

En essayant de définir de même A''' comme étant le minimum de A'', on tombe sur la définition donnée pour A'. On retrouve ainsi l'égalité

$$A' = A''' = \ldots.$$

Des définitions précédentes on déduit par analogie celles de I' et de I''.

I'. — 1° Il est possible d'entourer H d'un intervalle CD dans lequel l'ensemble des points où $f < I'(\mathrm{H}) + \varepsilon$ est partout dense;

2° Dans tout intervalle CD contenant H, existe un intervalle en chaque point duquel j'ai $f > I'(\mathrm{H}) - \varepsilon$.

$I'(\mathrm{H})$ est le plus petit nombre jouissant de la propriété 1° et le plus grand jouissant de la propriété 2°.

I''. — 1° Il est possible d'entourer H d'un intervalle CD, tel que l'ensemble des points où $f < I''(\mathrm{H}) - \varepsilon$ est non dense partout sur CD;

2° Dans tout intervalle CD contenant H, il existe un intervalle sur lequel l'ensemble des points où $f < I''(\mathrm{H}) + \varepsilon$ est partout dense.

$I''(\mathrm{H})$ est le plus grand nombre jouissant de la propriété 1° et le plus petit jouissant de la propriété 2°.

II.

Nous allons donner une application de ces définitions dans le théorème suivant :

Les fonctions de classe 1 *sont caractérisées par la double égalité* $A' = I''$ *et* $I' = A''$, *vérifiée quel que soit l'ensemble parfait pris pour base.*

Nous admettrons pour cela le théorème de M. Baire, à savoir que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f* *soit de classe 1 est qu'elle soit ponctuellement discontinuè sur tout ensemble parfait,* c'est-à-dire que *$A - I$ ait son minimum nul en tout point* ou, enfin, que *l'ensemble des points où $A - I < \varepsilon$ est partout dense* (et même peut être constitué par des intervalles partout denses).

Il nous suffit de montrer que $A' = I''$ par exemple. Car, si cette égalité est vérifiée, en la délimitant supérieurement on trouve

$$A'' = I'.$$

Mais, puisque dans la propriété que je veux démontrer f n'intervient que par la différence $A - I$, il convient de rattacher les fonctions A' et I'' respectivement à A et I. Afin d'avoir les définitions les plus avantageuses nous envisagerons successivement A' comme jouant, relativement à A, les rôles 1° de I, 2° de A'; puis I'' comme jouant, relativement à I, les rôles 1° de I'', 2° de A'.

On trouve de la sorte que :

H étant un point quelconque du continu linéaire P, et quel que soit le nombre positif ε donné :

A'. — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD contenant H à son intérieur et en chaque point duquel on ait

$$A > A'(\mathrm{H}) - \varepsilon;$$

2° Quel que soit CD, il y a dans CD un intervalle où

$$A < A'(\mathrm{H}) + \varepsilon.$$

I''. — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD contenant H à son intérieur et tel que l'ensemble des points où $I < I''(\mathrm{H}) - \varepsilon$ est non dense partout sur CD;

2° Dans tout intervalle CD contenant H il existe un intervalle en chaque point duquel $I < I''(\mathrm{H}) + \varepsilon$.

Ces définitions, comme les premières, s'appliquent à un ensemble parfait quelconque pris pour base. Nous allons démontrer que la condition $A' = I''$, vérifiée sur un ensemble parfait, caractérise une fonction ponctuellement discontinue sur cet ensemble parfait et, pour simplifier, nous prendrons pour base le continu.

Démontrons la proposition directe :

Par hypothèse, l'ensemble des points où $A - I < \varepsilon$ est partout dense.

Soit H un point quelconque. J'entoure H d'un intervalle CD (A', 1°), en chaque point duquel j'ai

$$A > A'(\mathrm{H}) - \varepsilon.$$

Dans CD je peux trouver $\mathrm{C_1 D_1}$ (I'', 2°) où

$$I < I''(\mathrm{H}) + \varepsilon.$$

Dans $\mathrm{C_1 D_1}$ je puis trouver un point M où $A(\mathrm{M}) < I(\mathrm{M}) + \varepsilon$. Donc l'inégalité $A'(\mathrm{H}) - \varepsilon < I''(\mathrm{H}) + \varepsilon$ est possible quel que soit ε. Or, $A' \geqq I''$. Donc

$$A'(\mathrm{H}) = I''(\mathrm{H}),$$

quel que soit H.

Réciproquement, supposons que $A' = I''$. Je vais montrer que, dans tout intervalle PQ, il est possible de trouver un point et même un intervalle où $A < \mathrm{I} + \varepsilon$.

En effet, je prends H intérieur à l'intervalle donné PQ. Il est possible (I'', 1°) de trouver un intervalle CD entourant H et dans lequel l'ensemble des points où $I < I''(\mathrm{H}) - \varepsilon$ est non dense. Je limite CD à sa partie comprise dans PQ.

Dans l'intervalle CD je peux trouver $\mathrm{C_1 D_1}$ (A', 2°) où

$$A < A'(\mathrm{H}) + \varepsilon.$$

Dans $\mathrm{C_1 D_1}$ je peux trouver $\mathrm{C_2 D_2}$ (I'', 1°) où

$$I > I''(\mathrm{H}) - \varepsilon.$$

En chaque point de $\mathrm{C_2 D_2}$, les deux inégalités sont vérifiées. Comme $A'(\mathrm{H}) = I''(\mathrm{H})$, en retranchant membre à membre, on voit qu'en tout point de $\mathrm{C_2 D_2}$ on a

$$A < I + 2\varepsilon.$$

Donc, f est ponctuellement discontinue sur le continu. Donc, la condition $A' = I''$ ou $A'' = I'$, vérifiée sur tout ensemble parfait, caractérise les fonctions de classe 1.

Désignons par O la différence $A - I$. O est l'oscillation de f relativement à l'ensemble parfait considéré. Soit O′ le minimum de O et O″ le maximum de O′. Lorsque f est ponctuellement discontinue, O′ est nul et, dans ce cas, nous venons de voir que $A' - I''$ est également nul, ainsi que $A'' - I'$. Ceci n'est qu'un cas particulier des doubles inégalités

$$O'' \geqq \begin{matrix} A' - I'' \\ A'' - I' \end{matrix} \geqq O',$$

qui sont vraies quelle que soit f.

Pour les démontrer, je commencerai par définir A'' et I', puis O′ et O″ par les propriétés qui les rattachent à A et à I. Soit H un point quelconque du continu linéaire P. Étant donné un nombre positif ε quelconque :

A''. — 1° Il est possible d'entourer H d'un intervalle CD, tel que l'ensemble des points où $A > A''(\mathrm{H}) + \varepsilon$ est non dense partout sur CD;

2° Dans tout intervalle CD contenant H existe un intervalle en chaque point duquel $A > A''(\mathrm{H}) - \varepsilon$.

I'. — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD contenant H, en chaque point duquel $I < I'(\mathrm{H}) + \varepsilon$;

2° Quel que soit CD entourant H, il y a dans CD un intervalle où $I > I'(\mathrm{H}) - \varepsilon$.

O′. — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD, contenant H à son intérieur, en chaque point duquel $A - I > \mathrm{O}'(\mathrm{H}) - \varepsilon$;

2° Quel que soit CD contenant H, il y a dans CD un intervalle où $A - I < \mathrm{O}'(\mathrm{H}) + \varepsilon$.

O″. — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD, contenant H à son intérieur, tel que l'ensemble des points où

$$A - I > \mathrm{O}''(\mathrm{H}) + \varepsilon$$

est non dense partout sur CD;

2° Dans tout intervalle CD contenant H à son intérieur existe un intervalle en chaque point duquel $A - I > \mathrm{O}''(\mathrm{H}) - \varepsilon$.

Pour obtenir les inégalités que j'ai en vue, j'associe chacune des inégalités auxquelles satisfont O' et O'' avec les inégalités concordantes relatives à A' et I'', A'' et I'.

Tout d'abord, je constate que (O', 2°) et (O'', 2°) ne donnent lieu à aucune conclusion. Voici le schéma des raisonnements qui me donnent les inégalités cherchées. J'ai écrit dans une même colonne verticale les intervalles que j'utilise dans le raisonnement. Chacun est entièrement contenu à l'intérieur de celui qui est écrit immédiatement au-dessus. A côté du nom de l'intervalle se trouve la condition qui le détermine et, sur la même ligne, la relation qui est vérifiée en chaque point intérieur à l'intervalle considéré. De la sorte, toutes les relations sont simultanément vérifiées en chaque point de l'intervalle écrit à la ligne inférieure. Je déduis alors, du fait que les relations écrites peuvent être simultanément vérifiées, la relation cherchée :

$$\begin{array}{lll} CD & (O',\ 1^\circ) & A - I > O'(H) - \varepsilon, \\ C_1D_1 & (A',\ 2^\circ) & A < A'(H) + \varepsilon, \\ C_2D_2 & (I'',\ 1^\circ) & I > I''(H) - \varepsilon, \end{array}$$

d'où

$$A'(H) - I''(H) \geqq O'(H);$$

$$\begin{array}{lll} CD & (O',\ 1^\circ) & A - I > O'(H) - \varepsilon, \\ C_1D_1 & (I',\ 2^\circ) & I > I'(H) - \varepsilon, \\ C_2D_2 & (A'',\ 1^\circ) & A < A''(H) + \varepsilon, \end{array}$$

d'où

$$A''(H) - I'(H) \geqq O'(H);$$

$$\begin{array}{lll} CD & (A',\ 1^\circ \text{ et } O'',\ 1^\circ) & A > A'(H) - \varepsilon, \\ C_1D_1 & (I'',\ 2^\circ) & I < I''(H) + \varepsilon, \\ C_2D_2 & (O'',\ 1^\circ) & A - I < O''(H) + \varepsilon, \end{array}$$

d'où

$$A'(H) - I''(H) \leqq O''(H);$$

$$\begin{array}{lll} CD & (I',\ 1^\circ \text{ et } O'',\ 1^\circ) & I < I'(H) + \varepsilon, \\ C_1D_1 & (A'',\ 2^\circ) & A > A''(H) - \varepsilon, \\ C_2D_2 & (O'',\ 1^\circ) & A - I < O''(H) + \varepsilon, \end{array}$$

d'où

$$A''(H) - I'(H) \leqq O''(H)$$

ou, en résumé,

$$O'' \geqq \begin{matrix} A' - I'' \\ A'' - I' \end{matrix} \geqq O'.$$

Délimitons supérieurement et inférieurement ces deux relations, Les termes extrêmes deviennent égaux. Donc,

$$A' - I'', \qquad A'' - I', \qquad O'$$

ont le même maximum O'';

$$A - I, \qquad A' - I'', \qquad A'' - I'$$

ont le même minimum, savoir O'.

III.

Nous allons maintenant nous occuper du cas où les six fonctions A, A', A'', I, I', I'' sont attachées à une fonction dépendant d'un indice. Nous aurons, à ce sujet, besoin d'un théorème général que je vais démontrer, relatif à la convergence d'une fonction vers une fonction limite.

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ une suite de fonctions définies sur un ensemble parfait quelconque que, pour simplifier, nous supposons être le continu linéaire AB. Supposons que f_n tende vers une limite f. Donnons-nous un nombre positif quelconque ε et un entier α. Désignons par $G(\alpha, \varepsilon)$ l'ensemble des points H tels que, quel que soit $n \geqq \alpha$, on ait toujours

$$|f_n(H) - f(H)| < \varepsilon.$$

Remarquons que, si

$$\alpha' > \alpha, \qquad G(\alpha', \varepsilon) \geqq G(\alpha, \varepsilon);$$

si

$$\varepsilon' < \varepsilon, \qquad G(\alpha, \varepsilon') \leqq G(\alpha, \varepsilon).$$

Je rappelle qu'avec M. Baire j'entendrai par *ensemble de première catégorie,* sur un ensemble parfait donné, un ensemble qui peut être considéré comme la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles, chacun non dense sur l'ensemble parfait considéré. Un ensemble qui n'est pas de première catégorie est dit *de seconde catégorie.*

Les deux propriétés fondamentales de ces divers ensembles sont les suivantes :

Une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie est un ensemble de première catégorie.

Un ensemble parfait est de seconde catégorie par rapport à lui-même.

Théorème I. — *Étant donné ε, il est possible de prendre α suffisamment grand pour que l'ensemble* $G(\alpha, \varepsilon)$ *soit de seconde catégorie sur* AB.

Car, s'il était de première catégorie quel que fût α, l'ensemble de tous les $G(\alpha, \varepsilon)$, pour toutes les valeurs de α, serait de première catégorie. Il y aurait donc des points de AB qui n'appartiendraient à aucun ensemble $G(\alpha, \varepsilon)$. En ces points, quel que fût α, il serait impossible que $|f_n - f| < \varepsilon$ pour toute valeur de n supérieure à α. Ceci est contradictoire avec l'hypothèse qu'en chaque point f_n tend vers f.

Théorème II. — *Étant donné ε, l'ensemble* $Q(\varepsilon)$ *des points tels que, autour de l'un de ces points,* $G(\alpha, \varepsilon)$ *est de première catégorie, quel que soit α, est non dense partout sur* AB.

Car, si l'ensemble $Q(\varepsilon)$ était dense sur un segment CD intérieur à AB, l'ensemble $G(\alpha, \varepsilon)$ serait de première catégorie sur CD, et cela, quel que fût α. Or, étant donné le segment CD, il existe un nombre α, tel que $G(\alpha, \varepsilon)$ et tous les ensembles qui le suivent soient de deuxième catégorie sur CD. Le théorème est donc vrai.

Je me suis appuyé sur la proposition suivante :

Étant donné un ensemble G *et un intervalle* CD, *si* G *est de première catégorie dans un intervalle fini λ autour de chaque point d'un ensemble* Q *partout dense sur* CD, G *est de première catégorie sur* CD.

Cette proposition se ramène elle-même à la suivante :

Il est possible, dans les conditions précédentes, de couvrir CD, *sauf les points d'un ensemble non dense* P, *d'une infinité dénombrable des intervalles λ, de telle façon que tout point de* CD *n'appartenant pas à* P *soit intérieur à l'un au moins de ces intervalles.*

Car : 1° les points qui n'appartiennent à aucun intervalle λ forment un ensemble non dense P (et même fermé) sur λ ; 2° considérons un intervalle EF contigu à cet ensemble fermé non dense. Soit E′F′ un intervalle intérieur à EF. Par hypothèse, chaque point

de E′F′, extrémités comprises, est intérieur à un intervalle λ. D'après un théorème connu de M. Borel, je peux couvrir E′F′ avec un nombre fini d'intervalles λ. Je n'ai plus qu'à prolonger la suite des intervalles de chaque côté vers E et vers F. J'atteindrai chaque point intérieur à EF avec un nombre fini d'intervalles λ. Donc, je pourrai trouver une infinité dénombrable d'intervalles λ tels que tout point intérieur à EF soit intérieur à un au moins de ces intervalles.

Il y a une infinité dénombrable d'intervalles EF. Donc, il y a une infinité dénombrable d'intervalles λ, tels que tout point de CD soit intérieur à un de ces intervalles, sauf les points de l'ensemble P non dense, tels que E et F.

Revenons à l'ensemble G. G est de première catégorie dans chaque intervalle λ. Or, les points de G qui n'appartiennent pas à P sont compris dans une infinité dénombrable d'intervalles, dans chacun desquels G est de première catégorie. Ces premiers points forment donc un ensemble de première catégorie. Restent les points de G situés sur l'ensemble non dense P. Mais un ensemble de première catégorie, augmenté d'un ensemble non dense, reste de première catégorie. Donc, G est de première catégorie sur CD. La démonstration du théorème II se trouve ainsi complètement élucidée.

Du théorème II nous déduisons :

Théorème III. — *L'ensemble Q des points pour chacun desquels il est possible de trouver un nombre* ε, *tel que, quel que soit* α, *l'ensemble* $G(\alpha, \varepsilon)$ *est de première catégorie autour du point considéré, est lui-même de première catégorie.*

Soit $Q(\varepsilon)$ l'ensemble non dense correspondant à un nombre ε. Donnons-nous une suite de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, tendant vers 0. L'ensemble des points communs à $Q(\varepsilon_1)$, $Q(\varepsilon_2)$, ...,

$Q(\varepsilon_n)$, ..., n'est autre que l'ensemble Q de l'énoncé. Comme $Q(\varepsilon_n)$ est non dense, Q est de première catégorie.

Le théorème auquel je viens d'aboutir me paraît intéressant par lui-même et c'est pourquoi j'ai cru devoir le démontrer. Mais, au point de vue de la question qui nous intéresse, les conditions imposées aux ensembles $G(\alpha, \varepsilon)$ et $Q(\varepsilon)$ sont plus restrictives qu'il n'est besoin. Les théorèmes démontrés le seront *a fortiori,* si je remplace les ensembles G et Q par les ensembles G' et Q' que je vais définir.

Désignons par $G'(\alpha, \varepsilon)$ l'ensemble des points H, tels que l'on ait $|f\alpha(H) - f(H)| < \varepsilon$. On a

$$G'(\alpha, \varepsilon) \geqq G(\alpha, \varepsilon).$$

L'énoncé du théorème I est renforcé. Celui du théorème II l'est aussi si l'on remplace dans l'énoncé G par G'. Supposons que dans cet énoncé on remplace aussi les mots *de première catégorie* par *qui ne soit pas partout dense sur un intervalle suffisamment petit entourant* H.

L'énoncé prend la forme suivante :

L'ensemble $Q'(\varepsilon)$ *total des points* H, *tels qu'autour de* H $G'(\alpha, \varepsilon)$ *n'est pas partout dense, quel que soit* α, ε *étant donné, est un ensemble non dense.* (Rappelons qu'*autour d'un point* signifie *dans un intervalle suffisamment petit entourant ce point.*)

En effet, si $Q'(\varepsilon)$ était dense sur un intervalle CD, on voit directement, que, quel que fût α, $G'(\alpha, \varepsilon)$ serait partout non dense dans CD, ce qui est contradictoire avec le fait que, α étant suffisamment grand, $G'(\alpha, \varepsilon)$ est de seconde catégorie dans CD.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant analogue au théorème III.

L'ensemble Q' *des points* H, *pour chacun desquels il est possible de trouver un nombre* ε, *tel que, quel que soit* α, *l'ensemble* $G'(\alpha, \varepsilon)$ *n'est pas partout dense autour de* H, *est de première catégorie.*

Considérons l'ensemble complémentaire de Q'. Pour chaque point K n'appartenant pas à Q', il est possible, quel que soit ε, de trouver un nombre α supérieur à tout nombre α_0 donné, tel que l'ensemble des points où $|f_\alpha - f| < \varepsilon$ est partout dense autour de K.

Considérons maintenant les six fonctions a_n, a''_n, a'_n, i'_n, i''_n, i_n, relatives à la fonction f_n, et supposons que ces quantités aient des limites quand n croît indéfiniment. Soient a, a'', a', i', i'', i ces six limites. On a

$$a \geqq a'' \geqq \frac{i'}{a'} \geqq i'' \geqq i,$$

et chacune de ces six fonctions est de classe 0, 1 ou 2. Comparons-les aux fonctions A, A'', A', I', I'', I, relatives à f.

Nous allons établir des relations d'inégalités vraies en tous les points autres que ceux d'un ensemble de première catégorie, en l'espèce Q$'$.

Soit H un point n'appartenant pas à Q$'$. Soit ε un nombre donné quelconque, aussi petit que l'on veut.

Je prends n_0 assez grand pour que $a'_n(\mathrm{H}) = a'(\mathrm{H}) + \theta\varepsilon$ $(\theta^2 < 1)$ pour toutes les valeurs de n supérieures à n_0.

H n'appartenant pas à Q$'$, je peux prendre parmi ces valeurs de n une valeur telle que l'ensemble des points où $f_n = f + \theta''\varepsilon$ $(\theta''^2 < 1)$ soit dense partout sur CD, CD étant un intervalle entourant H et suffisamment petit. Or :

1° Il est possible de trouver dans tout intervalle intérieur à CD et contenant H un intervalle (A', 2°) en chaque point duquel $f_n < a'_n + \varepsilon$. Dans cet intervalle, l'ensemble des points où $f < a' + 3\varepsilon$ est partout dense. Donc

$$a' \geqq I'';$$

2° $\mathrm{C_1 D_1}$ étant un intervalle suffisamment petit intérieur à CD et contenant H, dans tout intervalle $\mathrm{C_2 D_2}$ intérieur à $\mathrm{C_1 D_1}$ il est possible (A$''$, 1°) de trouver un intervalle en chaque point duquel $f_n < a''_n + \varepsilon$. Donc, l'ensemble des points où $f < a'' + 3\varepsilon$ est dense autour de H. Donc

$$a'' \geqq I'.$$

De même

$$i' \leqq A'', \qquad i'' \leqq A'.$$

a et i donneraient lieu aux inégalités $a \geqq I'$ et $i \leqq A'$, moins