BULLETIN DE LA S. M. F.

HADAMARD

Sur le principe de Dirichlet

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 135-138
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__135_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LE PRINCIPE DE DIRICHLET;

Par M. HADAMARD.

M. Hilbert a, comme on sait, indiqué une méthode permettant d'établir la possibilité du problème de Dirichlet (formation d'une fonction harmonique dans une aire donnée et prenant des valeurs données sur le contour) par la méthode même qui avait servi à Riemann, c'est-à-dire en prouvant directement que l'intégrale

$$(1) \qquad I = \int\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy,$$

étendue à l'aire donnée S, a un minimum.

A cet effet, l'auteur se place dans l'hypothèse où le contour de l'aire S est analytique (ou du moins composé de parties analytiques), et où il en est de même de la distribution des valeurs données de u sur ce contour. Il est alors clair, en tout cas, qu'il existe des fonctions u qui prennent ces valeurs à la frontière et qui, dans l'intérieur de l'aire, admettent des dérivées partielles finies, pour lesquelles, par conséquent, l'intégrale I existe.

Mais on sait que l'existence de la solution a été établie par d'autres méthodes, en supposant les valeurs de u simplement continues. Dans ces conditions, ce premier point de départ du raisonnement de M. Hilbert, à savoir l'existence de fonctions u satisfaisant aux conditions aux limites et pour lesquelles l'intégrale I ait un sens, cesse d'être aussi évident.

Or, il ne faut pas croire qu'il y ait là une difficulté toute superficielle.

Tout d'abord, si l'on cherche une fonction u prenant sur le contour d'une aire des valeurs données (simplement continues) et admettant, en tout point intérieur, des dérivées partielles, on ne trouvera guère, pour en former, de moyen plus simple que la résolution même du problème de Dirichlet.

Mais il y a plus : et l'on peut établir en toute rigueur que la méthode de M. Hilbert peut être inapplicable par le fait qu'il n'existe aucune fonction u qui donne à l'intégrale I un sens.

Supposons que S soit un cercle de rayon 1 : la solution du problème de Dirichlet est alors

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho^n \cos(n\theta + \alpha_n) \end{aligned}$$

avec

$$a_n = c_n \cos\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(1, \theta) \cos\theta \, d\theta,$$

$$b_n = c_n \sin\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(1, \theta) \sin\theta \, d\theta.$$

L'intégrale

$$\int\int \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy = \int\int \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta}\right)^2\right] \rho\, d\rho\, d\theta,$$

étendue à l'intérieur du cercle de rayon $\rho < 1$ qui a pour centre l'origine, est égale à

$$\pi \sum n c_n^2 \rho^{2n}. \tag{2}$$

Elle augmente donc indéfiniment lorsque ρ tend vers un, si la série

$$\sum n c_n^2 \tag{3}$$

est divergente. Or ceci peut arriver même si la série trigonométrique qui représente u sur la circonférence $\rho = 1$ est absolument convergente, il suffit de prendre

$$\left\{\begin{array}{lll} c_n = 0 & \text{pour} & n \neq 2^{2p} \\ c_n = \frac{1}{2^p} & \text{pour} & n = 2^{2p}. \end{array}\right.$$

S'il en est ainsi, on voit que la solution du problème de Dirichlet donne lieu à une intégrale de I infinie. Comme cette solution u_0 correspond au minimum de I, il est à prévoir qu'aucune autre fonction satisfaisant aux conditions aux limites ne pourra fournir une intégrale finie.

Mais, contrairement à ce qu'on pourrait croire *a priori*, il paraît impossible de fonder une démonstration rigoureuse de ce fait sur la considération de la fonction u_0, et il est nécessaire de raisonner directement.

Soit donc u une fonction quelconque définie à l'intérieur du centre de rayon 1, admettant, en tout point *intérieur* à ce cercle, des dérivées premières continues, et prenant sur la circonférence les valeurs données. Si l'on pose

$$A_n(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \theta)\cos n\theta \, d\theta,$$

$$B_n(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \theta)\sin n\theta \, d\theta,$$

puis

$$A'_n(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \rho}\cos n\theta \, d\theta,$$

$$B'_n(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin n\theta \, d\theta,$$

on aura tout d'abord

$$A'_n = \frac{dA_n}{d\rho}, \quad B'_n = \frac{dB_n}{d\rho}.$$

D'autre part et sans préjuger la possibilité de développer $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ en série trigonométrique, on sait (¹) qu'on a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\theta > \frac{A_0'^2}{2} + \sum_1^n (A_n'^2 + B_n'^2),$$

quel que soit l'entier n auquel on arrête la sommation.

De même, comme on peut écrire, pour $n > 0$,

$$A_n = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin n\theta \, d\theta,$$

$$B_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial \theta_i}\cos n\theta \, d\theta,$$

on aura

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 d\theta > \sum_1^n n^2(A_n^2 + B_n^2).$$

On a donc

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int^{\rho_0}\rho\, d\rho \int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\right] d\theta &> \sum_1^n \int_0^{\rho_0}\left(\rho A_n'^2 + n^2\frac{A_n^2}{\rho}\right) d\rho \\ &+ \sum_1^n \int_0^{\rho_0}\left(\rho B_n'^2 + n^2\frac{B_n^2}{\rho}\right) d\rho. \end{aligned}\right.$$

Or les méthodes ordinaires du calcul des variations permettent de montrer que l'intégrale

$$\int_0^{\rho_0}\left(\rho A_n'^2 + n^2\frac{A_n^2}{\rho}\right) d\rho,$$

où $A_n(\rho)$ est une fonction assujettie à s'annuler pour $\rho = 0$, est au moins égale à $n A_n^2(\rho_0)$.

Comme, pour $\rho = 1$, on a

$$A_n = a_n, \quad B_n = b_n,$$

nous retombons bien sur la conclusion énoncée : nous voyons que la méthode de M. Hilbert peut être inapplicable, alors même que le problème de Dirichlet a effectivement une solution.

(¹) *Voir*, par exemple, HARNACK, *Mathematische Annalen*, t. XVII, 1880, p. 125; HUGONIOT, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCV, 1882, p. 909.