BULLETIN DE LA S. M. F.

S. SANIELEVICI

Remarques sur certaines équations linéaires aux dérivées partielles

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 187-191

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__187_1>

REMARQUES SUR CERTAINES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. S. Sanielevici.

M. Laisant a montré (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XX, p. 117) que toute fonction de la forme

$$u = u_{\alpha_1} + u_{\alpha_2} + \ldots + u_{\alpha_p},$$

u_{α_i} étant une fonction homogène de degré α_i des variables x_1, x_2, ..., x_m, vérifie, si l'on pose

$$u^{(k)} = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(k)} u,$$

une équation aux dérivées partielles d'ordre p

$$(1) \qquad a_0 u^{(p)} + a_1 u^{(p-1)} + \ldots + a_p u = 0,$$

où $a_0, a_1, \ldots$ sont des coefficients constants.

La démonstration résulte immédiatement du théorème d'Euler; en effet, on a

$$\begin{gathered} u \;=\; u_{\alpha_1} + \ldots + u_{\alpha_p}, \\ u^{(1)} = \alpha_1 u_{\alpha_1} + \ldots + \alpha_p u_{\alpha_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u^{(p)} = \alpha_1(\alpha_1 - 1)\ldots(\alpha_1 - p + 1) u_{\alpha_1} + \ldots + \alpha_p(\alpha_p - 1)\ldots(\alpha_p - p + 1) u_{\alpha_p}, \end{gathered}$$

et l'on pourra éliminer les u_α. L'équation résultante

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} u & 1 & \ldots & 1 \\ u^{(1)} & \alpha_1 & \ldots & \alpha_p \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u^{(p)} & \alpha_1(\alpha_1 - 1)\ldots(\alpha_1 - p + 1) & \ldots & \alpha_p(\alpha_p - 1)\ldots(\alpha_p - p + 1) \end{vmatrix} = 0$$

est évidemment de la forme (1).

Réciproquement, étant donnée une équation telle que (1), M. Laisant démontre que son intégrale est une somme de p fonctions homogènes, dont on déterminera les degrés en identifiant le coefficient de $u^{(k)}(k = 0, 1, \ldots, p)$ dans (1) et (2). Cette identification conduit à une équation de degré p, dont les racines seront les degrés d'homogénéité cherchés.

M. Laisant n'a pas examiné le cas où cette équation a des racines multiples. On peut compléter ses résultats *en ramenant les équations aux dérivées partielles de la forme* (1) *à des équations différentielles linéaires à coefficients constants.* En même temps nous montrerons que cette méthode s'étend à une infinité d'autres classes d'équations aux dérivées partielles.

Désignons par δu le symbole opératoire $u^{(1)}$, et posons

$$\delta^2 u = \delta(\delta u), \quad \ldots, \quad \delta^n u = \delta(\delta^{n-1} u).$$

Il est aisé de voir que $\delta^n u$ est une combinaison linéaire de $u^{(1)}$, $u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}$.

En effet, M. Laisant montre que l'on a

$$\delta u^{(k)} = k\, u^{(k)} + u^{(k+1)}.$$

On aura donc successivement

$$\begin{aligned} \delta^2 u &= u^{(1)} + u^{(2)}, \\ \delta^3 u &= u^{(1)} + 3\, u^{(2)} + u^{(3)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et réciproquement

$$\begin{aligned} u^{(2)} &= \delta^2 u - \delta u, \\ u^{(3)} &= \delta^3 u - 3\,\delta^2 u + 2\,\delta u, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Soit maintenant u une fonction homogène de degré α; il est clair que l'on aura

$$(3) \qquad \delta u = \alpha u, \qquad \delta^2 u = \alpha^2 u, \quad \ldots, \quad \delta^n u = \alpha^n u.$$

L'effet de l'opération δ sur une fonction homogène est donc le même que celui de la différentiation sur une fonction exponentielle.

Par conséquent, étant donnée une équation aux dérivées partielles d'ordre p de la forme

$$(4) \qquad \alpha_0 u^{(p)} + \alpha_1 u^{(p-1)} + \ldots + \alpha_p u = 0,$$

on pourra l'écrire

$$(5) \qquad \delta^p u + b_1 \delta^{p-1} u + \ldots + b_p u = 0,$$

et l'on suivra, pour en trouver les intégrales, la méthode qu'on emploie dans la recherche des intégrales d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. On substituera à u une fonction homogène de degré inconnu α et l'on aura à résoudre une équation *caractéristique*

$$\alpha^p + b_1 \alpha^{p-1} + \ldots + b_p = 0,$$

qui fournira les degrés d'homogénéité des p parties de u, *si toutes les racines de cette équation sont simples.*

D'ailleurs, on peut ramener *effectivement* l'équation (5) à une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Il suffit de faire le changement de variables

$$u_1 = \log x_1 \qquad u_2 = \frac{x_2}{x_1}, \qquad \ldots, \qquad u_n = \frac{x_n}{x_1}.$$

Une fonction homogène $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de degré m prendra ainsi la forme $e^{mu_1} f(1, u_2, \ldots, u_n)$; *et le symbole* δ *se réduira à une simple dérivée.* On voit en effet facilement que l'on a

$$\delta = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial u_1}$$

et plus généralement

$$\delta^k = \frac{\partial^k}{\partial u_1^k}.$$

L'équation (5) devient donc simplement

$$(6) \qquad \frac{\partial^p u}{\partial u_1^p} + b_1 \frac{\partial^{p-1} u}{\partial u_1^{p-1}} + \ldots + b_p u = 0,$$

et, si α est une racine d'ordre m de multiplicité de l'équation caractéristique de (5) ou de (6), l'*intégrale correspondante sera*

$$e^{\alpha u_1}(c_0 + c_1 u_1 + c_2 u_1^2 + \ldots + c_{m-1} u_1^{m-1}),$$

c_0, c_1, ... étant des fonctions de u_2, u_3, ..., u_n; c'est-à-dire

$$C_0 + C_1 \log x_1 + \ldots + C_{m-1} (\log x_1)^{m-1},$$

C_0, C_1, ... *étant des fonctions homogènes de degré* α *en* x_1, x_2, ..., x_n.

Le succès de la méthode est dû à l'emploi de ce que Sophus Lie appelle les *variables canoniques*. En effet, le symbole δ n'est autre chose que le symbole d'une *transformation homothétique infinitésimale*. Une fonction homogène u admet le groupe homothétique, en ce sens que l'on a $\delta^n u = \alpha^n u$ (α est le degré d'homogénéité); par conséquent, si l'on remplace le groupe homothétique par le groupe *semblable* de translation, au moyen du changement de variables indiqué, *le symbole doit se réduire au symbole d'une translation infinitésimale* $\frac{\partial}{\partial u_1}$ *et la fonction doit se réduire à une exponentielle par rapport à* u_1.

On conclut immédiatement de cette remarque que la méthode précédente peut être appliquée aux équations aux dérivées partielles de la forme (5), *quel que soit le symbole* linéaire δ.

Prenons, par exemple, le symbole d'une rotation infinitésimale plane $x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$, ou $qx - py$. L'équation aux dérivées partielles

$$(7) \qquad x^2 t - 2xys + y^2 r - (px + qy) + a(qx - py) + bz = 0$$

peut s'écrire

$$\delta^2 z + a \, \delta z + bz = 0,$$

si l'on pose

$$\delta z = qx - py.$$

Si donc on introduit les variables canoniques, qui sont ici les *coordonnées polaires* ρ *et* ω, on aura

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial \omega}, \qquad \delta^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2}$$

et l'équation (7) se réduira simplement à

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} + a \frac{\partial z}{\partial \omega} + bz = 0.$$

Soient α et β les racines de l'équation caractéristique; l'intégrale générale de (7) sera

$$z = f(x^2+y^2)\, e^{\alpha \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}} + \varphi(x^2+y^2)\, e^{\beta \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}},$$

f et φ étant deux fonctions arbitraires.

Il est clair que les exemples peuvent être multipliés indéfiniment. Seulement, ce qui fait l'intérêt de la classe particulière considérée par M. Laisant, c'est que les symboles δ^n sont, dans ce cas, des combinaisons linéaires des seuls symboles $u^{(n)}$, ce qui n'a pas lieu en général.