

# BULLETIN DE LA S. M. F.

AURIC

## **Sur le développement en fraction continue d'une irrationnelle ambiguë du second degré**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 35 (1907), p. 121-125

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1907\\_\\_35\\_\\_121\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__121_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LE DÉVELOPPEMENT  
EN FRACTION CONTINUE D'UNE IRRATIONNELLE AMBIGUË  
DU SECOND DEGRÉ;**

PAR M. AURIC.

Considérons une irrationnelle  $\omega$  racine de l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

d'où

$$\omega = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Le développement en fraction continue de  $\omega$  est périodique et nous pouvons écrire

$$\omega \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

La racine conjuguée  $\omega' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  donne naissance au développement renversé et l'on a

$$\omega' \equiv (\lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_2, \lambda_1).$$

Si l'irrationnelle  $\omega$  appartient à une classe ambiguë, ces deux développements sont identiques et cela ne peut se produire que si la suite indéfinie

$$(1) \quad \dots, \lambda_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots$$

est symétrique soit par rapport à un terme  $\lambda$ , soit par rapport à l'intervalle compris entre deux termes consécutifs.

Nous savons que, dans le premier cas,  $\omega$  est racine d'une équation de la forme

$$ax^2 + \mu ax + c = 0,$$

d'où  $\omega = -\frac{\mu}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ , et nous dirons que  $\omega$  est une *pseudo-fraction*.

Dans le second cas  $\omega$  est racine d'une équation de la forme

$$ax^2 + bx + a = 0,$$

d'où  $\omega\omega' = 1$ , et nous dirons que  $\omega$  est une *pseudo-unité* <sup>(1)</sup>.

Trois cas seulement peuvent se présenter :

A. La suite (1) est symétrique par rapport à deux intervalles : en d'autres termes il existe deux pseudo-unités distinctes équivalentes au sens de Dedekind.

B. La suite (1) est symétrique par rapport à un intervalle et par rapport à un terme, ce qui se présentera évidemment si la période renferme un nombre impair de termes.

C. La suite (1) est symétrique par rapport à deux termes, c'est-à-dire qu'il existe deux pseudo-fractions équivalentes.

Nous allons examiner successivement chacun de ces cas et nous verrons que, si l'on appelle  $t$ ,  $u$  la plus petite solution de l'équation de Fermat

$$t^2 - \Delta u^2 = 4,$$

la nature de la suite (1) dépend exclusivement de la décomposition en facteurs des deux nombres  $t + 2$  et  $t - 2$ .

(1) Voir *Journal de M. Jordan*, 1902, p. 416. La distinction entre pseudo-fractions et pseudo-unités a pour but de faire ressortir des résultats différents au point de vue des identités arithmétiques. Mais elle n'est pas essentielle : en effet, toute période  $(\dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_i, \lambda_{i-1}, \dots)$ , symétrique par rapport à l'intervalle  $(\lambda_i, \lambda_i)$ , se ramène à la période  $(\dots, \lambda_{i-1}, \pm 1 + \lambda_i, \pm 1, \pm 1 + \lambda_i, \lambda_{i-1}, \dots)$ , qui est symétrique par rapport au terme  $\pm 1$ .

A. Appelons  $\omega$ ,  $\omega_1$  les deux pseudo-unités, on aura

$$\omega\omega' = \omega_1\omega'_1 = 1, \quad \omega_1 = \frac{A\omega - B}{C\omega - D},$$

avec

$$BC - AD = 1.$$

Cette relation subsiste évidemment si l'on remplace chaque irrationnelle par son inverse, ce qui donne

$$\frac{1}{\omega_1} = \frac{A - B\omega}{C - D\omega},$$

d'où en substituant on obtient les deux relations :

$$\omega = \frac{(A^2 - C^2)\omega - (AB - CD)}{(AB - CD)\omega - (B^2 - D^2)}, \quad \omega_1 = \frac{(A^2 - B^2)\omega_1 - (AC - BD)}{(AC - BD)\omega_1 - (C^2 - D^2)}$$

qui donnent sous une forme explicite les équations dont  $\omega$  et  $\omega_1$  sont racines.

La quantité placée sous le radical est égale à

$$(B^2 + C^2 - A^2 - D^2)^2 - 4,$$

ce qui permet d'écrire

$$B^2 + C^2 - A^2 - D^2 = t$$

et, comme  $BC - AD = 1$ , il vient

$$t + 2 = (B + C)^2 - (A + D)^2 = (B + C + A + D)(B + C - A - D),$$

$$t - 2 = (B - C)^2 - (A - D)^2 = (B - C + A - D)(B - C - A + D).$$

Si  $t + 2 = mn$  et  $t - 2 = pq$  sont des décompositions acceptables on aura évidemment

$$B = \frac{m + n + p + q}{4}, \quad A = \frac{m - n + p - q}{4},$$

$$C = \frac{m + n - p - q}{4}, \quad D = \frac{m - n - p + q}{4}.$$

B. Admettons en second lieu que l'on ait

$$\omega\omega' = 1, \quad \omega_1 + \omega'_1 = \lambda, \quad \omega_1 = \frac{A\omega - B}{C\omega - D}$$

avec

$$BC - AD = 1.$$

On trouvera comme seconde relation

$$\lambda - \omega_1 = \frac{A - B\omega}{C - D\omega}$$

et en éliminant il viendra

$$\omega = \frac{D(2B - D\lambda)\omega - (BC + AD - CD\lambda)}{(BC + AD - CD\lambda)\omega - C(2A - C\lambda)},$$

$$\omega_1 = \lambda - \frac{(AC - BD)\omega_1 - (A^2 - B^2)}{(C^2 - D^2)\omega_1 - (AC - BD)}.$$

La quantité placée sous le radical sera égale à

$$[\lambda(C^2 - D^2) - 2(AC - BD)]^2 - 4,$$

d'où l'on peut poser

$$\lambda(C^2 - D^2) - 2AC + 2BD = t$$

et par suite, en tenant compte de  $BC - AD = 1$ ,

$$t + 2 = (C + D)[\lambda(C - D) - 2A + 2B],$$

$$t - 2 = (C - D)[\lambda(C + D) - 2A - 2B].$$

Si les décompositions  $t + 2 = mn$ ,  $t - 2 = pq$  sont acceptables, on aura

$$C = \frac{m+p}{2}, \quad A = \frac{\lambda m - n - q}{4}, \quad D = \frac{m-p}{2}, \quad B = \frac{\lambda p + n - q}{4}.$$

Remarquons que l'on peut mettre le produit  $t\lambda$  sous la forme d'une somme algébrique de quatre carrés

$$t\lambda = B^2 + (C\lambda - A)^2 - A^2 - (D\lambda - B)^2$$

avec

$$B(C\lambda - A) - A(D\lambda - B) = \lambda.$$

C. Admettons, enfin, que l'on ait

$$\omega + \omega' = \lambda, \quad \omega_1 + \omega'_1 = \lambda_1, \quad \omega_1 = \frac{A\omega - B}{C\omega - D}$$

avec

$$BC - AD = 1.$$

On aura comme seconde relation

$$\lambda_1 - \omega_1 = \frac{A(\lambda - \omega) - B}{C(\lambda - \omega) - D},$$

et, par suite, en éliminant,

$$\begin{aligned} \omega &= \lambda - \frac{(CD\lambda_1 - BC - AD)\omega - D(D\lambda_1 - 2B)}{C(C\lambda_1 - 2A)\omega - (CD\lambda_1 - BC - AD)}, \\ \omega_1 &= \lambda_1 - \frac{(AC\lambda - BC - AD)\omega_1 - A(A\lambda - 2B)}{C(C\lambda - 2D)\omega_1 - (AC\lambda - BC - AD)}. \end{aligned}$$

La quantité placée sous le radical est

$$(C^2\lambda\lambda_1 - 2AC\lambda - 2DC\lambda_1 + 2BC + 2AD)^2 - 4,$$

ce qui permet de poser

$$C^2\lambda\lambda_1 - 2AC\lambda - 2DC\lambda_1 + 2BC + 2AD = t$$

et, par suite, puisque  $BC - AD = 1$ ,

$$\begin{aligned} t + 2 &= C(C\lambda\lambda_1 - 2A\lambda - 2D\lambda_1 + 4B), \\ t - 2 &= (C\lambda_1 - 2A)(C\lambda - 2D), \end{aligned}$$

et, si l'on pose encore  $t + 2 = mn$ ,  $t - 2 = pq$ , il viendra

$$C = m, \quad A = \frac{m\lambda_1 - p}{2}, \quad D = \frac{m\lambda - q}{2}, \quad B = \frac{m\lambda\lambda_1 - p\lambda - q\lambda_1 + n}{4}.$$

Enfin, nous remarquerons que l'on peut mettre le produit  $t\lambda\lambda_1$  sous la forme d'une somme algébrique de quatre carrés

$$t\lambda\lambda_1 = B^2 + (C\lambda\lambda_1 - A\lambda - D\lambda_1 + B)^2 - (A\lambda - B)^2 - (D\lambda_1 - B)^2$$

avec

$$B(C\lambda\lambda_1 - A\lambda - D\lambda_1 + B) - (A\lambda - B)(D\lambda_1 - B) = \lambda\lambda_1.$$

Il sera possible de déduire de nombreuses identités arithmétiques des formules que nous venons d'établir.