P. APPELL

Sur l'extinction du frottement

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 131-133
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__131_1>

SUR L'EXTINCTION DU FROTTEMENT;

PAR M. PAUL APPELL.

Dans un intéressant article publié dans ce Recueil [1], M. Lecornu a étudié, sur un exemple assez général, le problème de l'extinction du frottement.

I. Je me propose d'étudier la même question pour un système matériel présentant les caractères suivants, qui se trouvent réalisés dans la plupart des systèmes usuels.

1° Le système considéré est d'abord assujetti à des liaisons quelconques, sans frottement, indépendantes de temps;

2° Il est soumis à des forces intérieures dérivant d'un potentiel Π qui est positif dans toutes les configurations possibles du système

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXV, p. 3, 1907.

et qui devient *nul* dans une configuration spéciale, constituant une configuration d'équilibre stable du système sous l'action des seules forces intérieures;

3° Le système est en contact avec des solides fixes $S_1, S_2, \ldots, S_p$, sur lesquels il glisse avec frottement;

4° Il est soumis enfin à d'autres forces extérieures dérivant d'une fonction U, qui reste inférieure à une limite fixe L, pour toutes les positions du système dans lesquelles le contact subsiste avec l'un au moins des corps $S_1, S_2, \ldots, S_p$.

II. Le système étant ainsi défini, le théorème des forces vives donne l'équation

$$(1) \qquad d(T+\Pi-U) = -f_1 N_1 v_1\,dt - f_2 N_2 v_2\,dt - \ldots - f_p N_p v_p\,dt,$$

où T est la demi-force vive, où $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont les coefficients de frottement, $N_1, N_2, \ldots, N_p$ les valeurs absolues des réactions normales, $v_1, v_2, \ldots, v_p$ les valeurs absolues des vitesses des points matériels en contact avec les solides $S_1, S_2, \ldots, S_p$.

On déduit de cette équation la conséquence suivante :

Si les réactions restent finies, il est impossible que l'un quelconque des produits $N_1 v_1, N_2 v_2, \ldots, N_p v_p$, *ainsi que la somme* $\Sigma f N v$, *ait une limite inférieure autre que zéro.*

En effet, supposons, par exemple, que pour les valeurs croissantes du temps t, $N_k v_k$ reste supérieur à un nombre positif fixe λ, différent de zéro. On aura

$$\frac{d}{dt}(T+\Pi-U) < -\lambda f_k$$

d'où, en intégrant,

$$T+\Pi-U < -\lambda f_k t + C;$$

comme, par hypothèse, U est limité, $U < L$, tant que le système est en contact avec S_k, on a

$$T+\Pi < -\lambda f_k t + C + L.$$

Mais alors, au bout d'un temps t suffisamment grand, $T+\Pi$ deviendrait *nul,* et les vitesses de tous les points du système s'annuleraient dans la configuration d'équilibre stable correspondant à $\Pi = 0$.

Ce résultat est en contradiction avec l'hypothèse faite

$$N_k v_k > \lambda,$$

car, puisque les vitesses s'annulent, v_k tend vers zéro et N_k est supposé fini.

Les limites inférieures de tous les produits $N_1 v_1$, $N_2 v_2$, ..., $N_p v_p$ *et de la somme* $\Sigma f N v$ *sont donc nulles.*

Il arrivera, en général, que ces produits tendront tous vers *zéro*. Donc, certaines des réactions, N_1, N_2, ..., N_k, par exemple, tendront vers *zéro;* le système tendra à abandonner les liaisons avec frottement d'où proviennent ces réactions. En même temps les vitesses des autres points frottants v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_p tendront vers *zéro* et les glissements correspondants tendront à disparaître.

Le système, dans son ensemble, cherchera donc bien à échapper au frottement.

Ces considérations s'étendent au cas où les corps du système frottent les uns sur les autres. Je laisse à d'autres, qui auront plus de loisirs que moi, le soin de les généraliser et de les préciser.