BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 163-173
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__163_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UN CAS ÉLÉMENTAIRE DE L'ÉQUATION DE FREDHOLM;

PAR M. E. GOURSAT.

1. L'équation de Fredholm

$$\varphi(x)+\lambda\int_0^1 K(x,s)\varphi(s)\,ds=\psi(x), \tag{1}$$

où $\psi(x)$ et $K(x,y)$ sont des fonctions données et $\varphi(x)$ la fonction inconnue, se résout très aisément lorsque la fonction $K(x,y)$ ou *noyau* (*Kern*) est de la forme

$$K(x,y)=X_1Y_1+X_2Y_2+\ldots+X_nY_n, \tag{2}$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des fonctions de la seule variable x et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ des fonctions de la seule variable y. Par quelques transformations simples de déterminants, on arrive à mettre la solution sous une forme où ne figure que la seule fonction $K(x,y)$; en supposant ensuite que le nombre n croît indéfiniment, on est conduit tout naturellement à la solution générale de l'équation (1) sous la forme même de M. Fredholm. J'ai pensé que cette remarque pouvait présenter quelque intérêt au point de vue de l'enseignement.

2. Si le noyau $K(x,y)$ est de la forme (2), on peut supposer que les n fonctions $X_1, X_2 \ldots, X_n$ sont linéairement indépendantes, sans quoi il serait possible de mettre $K(x,y)$ sous une forme analogue à la formule (2), où figureraient moins de n produits. On peut également supposer, pour la même raison, que les n fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont linéairement indépendantes. En remplaçant $K(x,y)$ par l'expression $X_1Y_1+\ldots+X_nY_n$ dans l'équation (1), celle-ci s'écrit

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x)+\lambda\left[X_1(x)\int_0^1 Y_1(s)\,\varphi(s)\,ds\right.\\ &\qquad\left.+X_2(x)\int_0^1 Y_2(s)\,\varphi(s)\,ds+\ldots\right]=\psi(x),\end{aligned}\right.$$

et l'on en conclut que la fonction inconnue $\varphi(x)$ doit être de la forme

$$(4)\qquad \varphi(x)=\psi(x)-H_1X_1(x)-H_2X_2(x)-\ldots-H_nX_n(x),$$

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ étant des coefficients constants.

Pour déterminer ces coefficients, remplaçons encore $\varphi(s)$ par

$$\psi(s)-H_1X_1(s)-H_2X_2(s)-\ldots-H_nX_n(s)$$

dans l'équation (1); elle devient

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\psi(x)-H_1X_1(x)-H_2X_2(x)-\ldots-H_nX_n(x)\\ &\quad+\lambda\int_0^1 [X_1(x)\,Y_1(s)+\ldots+X_n(x)\,Y_n(s)]\\ &\qquad\times[\psi(s)-H_1X_1(s)-\ldots-H_nX_n(s)]\,ds=\psi(x).\end{aligned}\right.$$

Les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant par hypothèse linéairement indépendantes, pour que cette égalité puisse avoir lieu, il faut que l'on ait

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &H_1=\lambda\int_0^1 Y_1(s)[\psi(s)-H_1X_1(s)-\ldots-H_nX_n(s)]\,ds,\\ &H_2=\lambda\int_0^1 Y_2(s)[\psi(s)-H_1X_1(s)-\ldots-H_nX_n(s)]\,ds,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &H_n=\lambda\int_0^1 Y_n(s)[\psi(s)-H_1X_1(s)-\ldots-H_nX_n(s)]\,ds.\end{aligned}\right.$$

Posons

$$(7)\qquad A_{ik}=\int_0^1 X_i(s)\,Y_k(s)\,ds;$$

on voit que les n coefficients $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sont déterminés par les n équations linéaires

$$(8)\quad \begin{cases} (1+\lambda A_{11})H_1+\lambda A_{21}H_2+\ldots+\lambda A_{n1}H_n=\lambda\displaystyle\int_0^1 Y_1(s)\psi(s)\,ds, \\ \lambda A_{12}H_1+(1+\lambda A_{22})H_2+\ldots+\lambda A_{n2}H_n=\lambda\displaystyle\int_0^1 Y_2(s)\psi(s)\,ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda A_{1n}H_1+\lambda A_{2n}H_2+\ldots+(1+\lambda A_{nn})H_n=\lambda\displaystyle\int_0^1 Y_n(s)\psi(s)\,ds; \end{cases}$$

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ sont donc des fonctions rationnelles du paramètre λ, et nous allons d'abord étudier le dénominateur commun de ces fractions

$$(9)\qquad \mathcal{D}_n(\lambda)=\begin{vmatrix} 1+\lambda A_{11} & \lambda A_{21} & \ldots & \lambda A_{n1} \\ \lambda A_{12} & 1+\lambda A_{22} & \ldots & \lambda A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda A_{1n} & \lambda A_{2n} & \ldots & 1+\lambda A_{nn} \end{vmatrix}$$

3. Si l'on ordonne ce polynome suivant les puissances de λ, le coefficient de λ^p est égal à la somme de tous les déterminants d'ordre p que l'on déduit du déterminant

$$D=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

en supprimant $n-p$ colonnes quelconques et les $n-p$ lignes correspondantes. Nous désignerons l'un quelconque de ces déterminants par $\delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$, les indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ désignant les rangs des lignes et des colonnes conservées; le coefficient de λ^p est donc

$$\sum \delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p},$$

la sommation s'étendant à toutes les combinaisons p à p des n premiers nombres, et les indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ se succédant dans leur ordre naturel. On a, par exemple,

$$\delta_{12\ldots p}=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{p1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{p2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1p} & A_{2p} & \ldots & A_{pp} \end{vmatrix}$$

Un terme quelconque de l'un de ces déterminants est un produit de p intégrales tel que

$$\int_0^1 X_1(s)\,Y_1(s)\,ds \times \int_0^1 X_2(s)\,Y_2(s)\,ds \times \ldots \times \int_0^1 X_p(s)\,Y_p(s)\,ds,$$

et l'on peut évidemment le remplacer par une intégrale multiple d'ordre p

$$\int\int \cdots \int X_1(x_1)\,Y_1(x_1)\,X_2(x_2)\,Y_2(x_2)\ldots X_p(x_p)\,Y_p(x_p)\,dx_1\ldots dx_p,$$

les limites de l'intégration étant o et 1 pour les p variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$, comme dans toutes les suivantes. Cette remarque s'appliquant à un terme quelconque de $\delta_{12\ldots p}$, il s'ensuit que, si l'on pose

$$\delta'_{12\ldots p} = \begin{vmatrix} X_1(x_1)\,Y_1(x_1) & X_2(x_1)\,Y_1(x_1) & \ldots & X_p(x_1)\,X_1(x_1) \\ X_1(x_2)\,Y_2(x_2) & X_2(x_2)\,Y_2(x_2) & \ldots & X_p(x_2)\,Y_2(x_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_1(x_p)\,Y_p(x_p) & X_2(x_p)\,Y_p(x_p) & \ldots & X_p(x_p)\,X_p(x_p) \end{vmatrix},$$

on a

$$\delta_{12\ldots p} = \int\int \cdots \int \delta'_{12\ldots p}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p;$$

et la même remarque s'applique évidemment aux autres déterminants partiels $\delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$.

Cela posé, considérons les deux tableaux rectangulaires à p lignes et à n colonnes ($p \leqq n$) :

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{vmatrix} X_1(x_1) & X_2(x_1) & \ldots & X_n(x_1) \\ X_1(x_2) & X_2(x_2) & \ldots & X_n(x_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ X_1(x_p) & X_2(x_p) & \ldots & X_n(x_p) \end{vmatrix},$$

$$(\mathrm{T}') \qquad \begin{vmatrix} Y_1(x_1) & Y_2(x_1) & \ldots & Y_n(x_1) \\ Y_1(x_2) & Y_2(x_2) & \ldots & Y_n(x_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ Y_1(x_p) & Y_2(x_p) & \ldots & Y_n(x_p) \end{vmatrix},$$

et désignons par TT' le produit de ces deux tableaux, c'est-à-dire la somme des produits obtenus en multipliant un déterminant d'ordre p formé par p colonnes du tableau (T) par le déterminant correspondant déduit de (T').

Si l'on prend, par exemple, les p premières colonnes de (T) et de (T′), le produit correspondant est un déterminant d'ordre p dont les éléments de la première ligne sont respectivement

$$\begin{array}{c} X_1(x_1)\,Y_1(x_1)+X_1(x_2)\,Y_1(x_2)+\ldots+X_1(x_p)\,Y_1(x_p), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_1(x_1)\,Y_p(x_1)+X_1(x_2)\,Y_p(x_2)+\ldots+X_1(x_p)\,Y_p(x_p), \end{array}$$

les autres lignes se déduisant de celle-là en remplaçant l'indice 1 de X par 2, 3, ..., p successivement. Ce déterminant est égal à la somme de p^p déterminants partiels obtenus en décomposant chaque élément en p parties. Mais, pour avoir des déterminants partiels différents de zéro, il faut prendre des indices différents pour la variable x_i dans chaque ligne. On aura donc seulement $1.2\ldots p$ déterminants partiels différents de zéro, de la forme

$$\begin{vmatrix} X_1(x\beta_1)\,Y_1(x\beta_1) & X_1(x\beta_2)\,Y_2(x\beta_2) & \ldots & X_1(x\beta_p)\,Y_p(x\beta_p) \\ X_2(x\beta_1)\,Y_1(x\beta_1) & X_2(x\beta_2)\,Y_2(x\beta_2) & \ldots & X_2(x\beta_p)\,Y_p(x\beta_p) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ X_p(x\beta_1)\,Y_1(x\beta_1) & X_p(x\beta_2)\,Y_2(x\beta_2) & \ldots & X_p(x\beta_p)\,Y_p(x\beta_p) \end{vmatrix},$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ désignant une permutation des p premiers nombres. Il est clair que l'intégrale de ce déterminant, les limites pour toutes les variables étant 0 et 1, est encore égale à $\delta_{12\ldots p}$. Il s'ensuit que le facteur $\delta_{12\ldots p}$ se retrouve multiplié par $p!$ dans l'intégrale multiple

$$I_p = \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 TT'\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p;$$

il en est évidemment de même de tous les autres facteurs $\delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}$, et nous concluons de là que le coefficient de λ^p dans $\mathrm{D}_n(\lambda)$ est égal à

$$\frac{I_p}{1.2\ldots p}.$$

D'autre part, le produit TT′ est égal à un déterminant d'ordre n

$$TT' = \begin{vmatrix} X_1(x_1)\,Y_1(x_1)+X_2(x_1)\,Y_2(x_1)+\ldots+X_n(x_1)\,Y_n(x_1) & \ldots \\ X_1(x_2)\,Y_1(x_1)+X_2(x_2)\,Y_2(x_1)+\ldots+X_n(x_2)\,Y_n(x_1) & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ X_1(x_p)\,Y_1(x_1)+X_1(x_p)\,Y_2(x_1)+\ldots+X_n(x_p)\,Y_n(x_1) & \ldots \end{vmatrix},$$

les autres colonnes se déduisant de la première en remplaçant, dans Y_i, x_1 par $x_2, x_3, \ldots, x_p$ successivement. Mais ce déterminant n'est autre chose, d'après la formule (2), que

$$\begin{vmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) & \ldots & K(x_1, x_p) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) & \ldots & K(x_2, x_p) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ K(x_p, x_1) & K(x_p, x_2) & \ldots & K(x_p, x_p) \end{vmatrix},$$

ou, d'après la notation de M. Fredholm,

$$K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix}.$$

En définitive, nous voyons que le coefficient de λ^p dans le polynome $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ est égal à

$$\frac{1}{1.2\ldots p}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1\, dx_2 \ldots dx_p.$$

4. Des équations (8) on déduit l'expression de la somme

$$H_1X_1 + H_2X_2 + \ldots + H_nX_n$$

au moyen d'un nouveau déterminant d'ordre $n+1$

$$\sum_{i=1}^{n} H_i X_i(x) = \frac{-\lambda}{\mathfrak{D}(\lambda)}\begin{vmatrix} 0 & X_1(x) & X_2(x) & \ldots & X_n(x) \\ B_1 & 1 + A_{11}\lambda & A_{21}\lambda & \ldots & A_{n1}\lambda \\ B_2 & A_{12}\lambda & 1 + A_{22}\lambda & \ldots & A_{n2}\lambda \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ B_n & A_{1n}\lambda & A_{2n}\lambda & \ldots & 1 + A_{nn}\lambda \end{vmatrix},$$

en posant

$$B_i = \int_0^1 Y_i(s)\,\psi(s)\,ds,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\sum_i H_i X_i(x) = \frac{\lambda}{\mathfrak{D}(\lambda)}\int_0^1 \psi(s)\,T(x, s)\,ds,$$

$T(x, s)$ désignant le déterminant

$$T(x, s) = \begin{vmatrix} 0 & -X_1(x) & -X_2(x) & \ldots & -X_n(x) \\ Y_1(s) & 1 + A_{11}\lambda & A_{21}\lambda & \ldots & A_{n1}\lambda \\ Y_2(s) & A_{12}\lambda & 1 + A_{22}\lambda & \ldots & A_{n2}\lambda \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ Y_n(s) & A_{1n}\lambda & A_{2n}\lambda & \ldots & 1 + A_{nn}\lambda \end{vmatrix}$$

Nous allons encore chercher à développer $T(x, s)$ suivant les puissances de λ. C'est un polynome de degré $n - 1$ au plus, dans lequel le terme indépendant de λ est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & -X_1(x) & -X_2(x) & \dots & -X_n(x) \\ Y_1(s) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ Y_2(s) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots\dots & . & . & \dots & 0 \\ Y_n(s) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$
$$= X_1(x)Y_1(s) + X_2(x)Y_2(s) + \dots + X_n(x)Y_n(s) = K(x, s).$$

D'une façon générale le coefficient de λ^p dans $T(x, s)$ est égal à la somme des déterminants d'ordre $p + 2$ que l'on déduit du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -X_1(x) & -X_2(x) & \dots & -X_n(x) \\ Y_1(s) & A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ Y_2(s) & A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_n(s) & A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

en conservant les éléments communs à $p + 2$ lignes et aux $p + 2$ colonnes correspondantes, la première ligne et la première colonne n'étant jamais supprimées complètement. Il y a deux sortes de termes de degré p en λ ; les uns contiennent en facteur un produit tel que $X_i(x)Y_i(s)$, les autres un facteur de la forme $X_i(x)Y_k(s)$, où $i \neq k$. Il suffit évidemment par raison de symétrie de calculer les coefficients de $\lambda^p X_1(x) Y_1(s)$ et de $\lambda^p X_1(x) Y_2(s)$.

Le coefficient de $\lambda^p X_1(x) Y_1(s)$ est, d'après ce qui précède, égal à la somme des déterminants d'ordre p que l'on déduit du déterminant

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

en conservant seulement les éléments communs à p lignes et aux p colonnes correspondantes.

Chaque terme de ce déterminant est encore le produit de p intégrales simples et peut être remplacé par une intégrale multiple d'ordre p. Or, si nous considérons les deux tableaux

$$\mathfrak{T} = \begin{vmatrix} X_1(x) & X_2(x) & \ldots & X_n(x) \\ X_1(x_1) & X_2(x_1) & \ldots & X_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_1(x_p) & X_2(x_p) & \ldots & X_n(x_p) \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{T}' = \begin{vmatrix} Y_1(s) & Y_2(s) & \ldots & Y_n(s) \\ Y_1(x_1) & Y_2(x_1) & \ldots & Y_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_1(x_p) & Y_2(x_p) & \ldots & Y_n(x_p) \end{vmatrix},$$

le coefficient de $X_1(x)\,Y_1(s)$ dans le produit $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$ est égal au produit des deux tableaux

$$\Theta = \begin{vmatrix} X_2(x_1) & \ldots & X_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_2(x_p) & \ldots & X_n(x_p) \end{vmatrix}, \qquad \Theta' = \begin{vmatrix} Y_2(x_1) & \ldots & Y_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_2(x_p) & \ldots & Y_n(x_p) \end{vmatrix},$$

et l'on reconnaît comme plus haut (n° 3) que chaque terme du coefficient de $\lambda^p X_1(x)\,Y_1(s)$ se retrouve, multiplié par $p!$ dans l'intégrale multiple

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \Theta\Theta'\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p.$$

Le coefficient de $X_1(x)\,Y_2(s)$ dans le produit $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$ est de même égal, au signe près, au produit des deux tableaux Θ et Θ''

$$\Theta'' = \begin{vmatrix} Y_1(x_1) & Y_3(x_1) & \ldots & Y_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_1(x_p) & Y_3(x_p) & \ldots & Y_n(x_p) \end{vmatrix},$$

et l'intégrale multiple

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \Theta\Theta''\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p$$

contient encore $p!$ fois chaque terme du coefficient de $\lambda^p X_1(x)\,Y_2(s)$ dans $T(x,\,s)$. En définitive, le coefficient de λ^p dans $T(x,\,s)$ est égal à

$$\frac{1}{p!}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \mathfrak{T}\mathfrak{T}'\,dx_1\,dx_2\ldots dx_p.$$

Mais le produit $\mathfrak{T}\mathfrak{T}'$ est égal à un déterminant unique d'ordre $p+1$

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}' = \begin{vmatrix} X_1(x)\,Y_1(s)+\ldots+X_n(x)\,Y_n(s) & \ldots & X_1(x)\,Y_1(x_p)+\ldots+X_n(x)\,Y_n(x_p) \\ X_1(x_1)\,Y_1(s)+\ldots+X_n(x_1)\,Y_n(s) & \ldots & X_1(x_1)\,Y_1(x_p)+\ldots+X_n(x_1)\,Y_n(x_p) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ X_1(x_p)\,Y_1(s)+\ldots+X_n(x_p)\,Y_n(s) & \ldots & X_1(x_p)\,Y_1(x_p)+\ldots+X_n(x_p)\,Y_n(x_p) \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, d'après les notations de M. Fredholm,

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}' = K\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_p \\ s, x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix},$$

et l'on a

$$T(x, s) = K(x, s) + \sum_{p=1}^{n-1} \lambda^p \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} x, x_1, \ldots, x_p \\ s, x_1, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p.$$

En résumé, lorsque la fonction $K(x, y)$ est de la forme (2), si l'on pose

$$(10) \qquad \mathfrak{D}_n(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p,$$

$$(11) \qquad \mathfrak{F}_n(x, y; \lambda) = \lambda\, K(x, y) + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\lambda^{p+1}}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} x, x_1, \ldots, x_p \\ y, x_1, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p,$$

et si λ n'est pas racine de l'équation $\mathfrak{D}_n(\lambda) = 0$, l'équation intégrale (1) admet une solution unique donnée par la formule

$$(12) \qquad \varphi(x) = \psi(x) - \frac{1}{\mathfrak{D}_n(\lambda)} \int_0^1 \psi(s)\, \mathfrak{F}_n(x, s; \lambda)\, ds.$$

4. La loi de formation des coefficients, dans les deux polynomes en λ, $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ et $\mathfrak{F}_n(x, y; \lambda)$, est évidemment indépendante de la forme particulière (2) que nous avons supposée à la fonction $K(x, y)$; cette loi de formation peut s'appliquer en partant d'une fonction quelconque des deux variables x et y. Mais, si l'on part d'une fonction de la forme (2), les développements obtenus pour $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ et $\mathfrak{F}_n(x, y; \lambda)$ s'arrêtent d'eux-mêmes, car les déterminants

$$K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix}, \quad K\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1} \\ y, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1} \end{pmatrix}$$

sont nuls, comme sommes de déterminants ayant deux colonnes identiques, dès que p est supérieur à n. Au contraire, si l'on part d'une fonction quelconque de deux variables $f(x, y)$, on obtient en général deux séries entières en λ toujours convergentes

$$(13)\quad \mathfrak{D}(\lambda) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\lambda^p}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ x_1, x_2, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p,$$

$$(14)\quad \mathfrak{F}(x, y; \lambda) = \lambda f(x, y) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{p+1}}{p!} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x, x_1, \ldots, x_p \\ y, x_1, \ldots, x_p \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p$$

si λ n'est pas racine de l'équation $\mathfrak{D}(\lambda) = 0$, on est conduit *par induction* à représenter par la formule

$$(15)\quad \varphi(x) = \psi(x) - \frac{1}{\mathfrak{D}(\lambda)} \int_0^1 \psi(s) \mathfrak{F}(x, s; \lambda)\, ds,$$

la solution de l'équation fonctionnelle

$$(1)'\quad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, s)\, \varphi(s)\, ds = \psi(s).$$

On peut vérifier *a posteriori* l'exactitude de la solution par la méthode de M. Fredholm. On peut aussi démontrer *a priori* que l'extension de la formule (12) au cas de n infini est légitime dans le cas très étendu où la fonction $f(x, y)$ est développable en série uniformément convergente de la forme

$$(16)\quad f(x, y) = \sum_i X_i(x)\, Y_i(y).$$

Posons en effet

$$K_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i,$$

et soient $\mathfrak{D}_n(\lambda)$, $\mathfrak{F}_n(x, y; \lambda)$ les deux polynomes en λ obtenus en remplaçant $K(x, y)$ par $K_n(x, y)$ dans les formules (10) et (11). On démontre facilement que le polynome $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ a pour limite $\mathfrak{D}(\lambda)$, et que $\mathfrak{F}_n(x, y; \lambda)$ tend uniformément vers $\mathfrak{F}(x, y; \lambda)$ lorsque n croît indéfiniment, de sorte que la fonction $\varphi_n(x)$ représentée par la formule

$$(12)'\quad \varphi_n(x) = \psi(x) - \frac{1}{\mathfrak{D}_n(\lambda)} \int_0^1 \psi(s)\, \mathfrak{F}_n(x, s; \lambda)\, ds$$

tend uniformément vers la fonction $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \psi(x) - \frac{1}{\mathfrak{D}(\lambda)} \int_0^1 \psi(s)\,\mathfrak{F}(x, s; \lambda)\, ds, \tag{17}$$

pourvu que λ ne soit pas racine de l'équation $\mathfrak{D}(\lambda) = 0$.

D'autre part, l'équation

$$\varphi_n(x) + \lambda \int_0^1 K_n(x, s)\,\varphi_n(s)\, ds = \psi(x)$$

peut s'écrire

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) + \lambda \int_0^1 f(x, s)\,\Phi(s)\, ds + \lambda \int_0^1 [K_n(x, s) - f(x, s)]\,\varphi_n(s)\, ds \\ + \lambda \int_0^1 f(x, s)\,[\varphi_n(s) - \Phi(s)]\, ds = \psi(x);\end{aligned}$$

si n croît indéfiniment, les deux dernières intégrales du premier membre tendent vers zéro, et il reste à la limite

$$\Phi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, s)\,\Phi(s)\, ds = \psi(x).$$

Remarque. — Les théorèmes généraux sur l'équation de Fredholm peuvent de même se déduire comme cas limites de théorèmes analogues relatifs au cas élémentaire considéré dans cette Note.