BULLETIN DE LA S. M. F.

M. WEILL

Propriétés des polygones inscrits à une conique

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 196-202
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__196_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

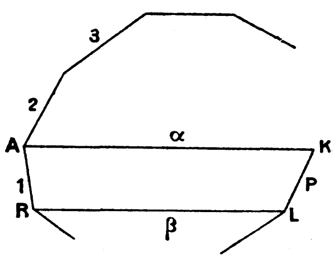
PROPRIÉTÉS DES POLYGONES INSCRITS A UNE CONIQUE;

PAR M. MATHIEU WEILL.

THÉORÈME I. — *Le produit des distances d'un point quelconque d'une conique aux côtés d'un polygone inscrit est dans un rapport constant avec le produit des distances de ce point aux droites qui joignent de p en p les sommets du polygone.*

Parcourons le polygone dans l'ordre indiqué par les côtés $1, 2, \ldots, p, \ldots$, et, dans les égalités qui vont suivre, négligeons, pour la

Fig. 1.



commodité de l'écriture, des facteurs constants, en désignant par (1) la distance d'un point M de la conique au côté 1, par (2) la distance de M au côté 2, et ainsi de suite.

Le quadrilatère AKLR formé par les côtés $1, p, \alpha, \beta$ donne lieu à l'égalité

$$(1)(p) = (\alpha)(\beta).$$

Formons de pareilles égalités en parcourant les sommets successifs du polygone, nous aurons

$$\begin{aligned} (2)(p+1) &= (\alpha')(\beta'), \\ (3)(p+2) &= (\alpha'')(\beta''), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

d'où, en désignant par P le produit des distances de M à tous les côtés du polygone,

$$(P)^2 = [(\alpha)(\alpha')(\alpha'')\ldots][(\beta)(\beta')(\beta'')\ldots].$$

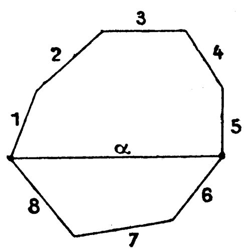
Or, le produit $(\alpha)(\alpha')(\alpha'')\ldots$ représente le produit des distances de M aux droites qui joignent les sommets pris de $(p-2)$ en $(p-2)$; et le produit $(\beta)(\beta')\ldots$ représente le produit des distances de M aux droites qui joignent les sommets pris de p en p.

Le théorème est donc vrai pour p s'il l'est pour $(p-2)$. Or, il est vrai pour la valeur $p-2=2$; donc il est général.

Théorème II. — *Étant donné un polygone de $2m$ côtés inscrit dans une conique, et dont les côtés sont numérotés* 1, 2, 3, 4, ..., $2m$, *le produit des distances d'un point quelconque* M *de la conique aux côtés* 1, 3, 5, 7, ... *est dans un rapport constant avec le produit des distances de* M *aux côtés* 2, 4, 6, ..., $2m$; *et aussi dans un rapport constant avec le produit des distances de* M *aux diagonales.*

Pour démontrer la première partie, considérons, par exemple,

Fig. 2.



un octogone que nous décomposerons en quadrilatère et hexagone en joignant 2 sommets; en supposant le théorème vrai pour l'hexagone, nous aurons

$$(1)(3)(5)=(2)(4)(\alpha),$$

puis

$$(7)(\alpha)=(6)(8).$$

On voit donc que, si le théorème est vrai pour un polygone de $2m$ côtés, il est vrai pour un polygone de $(2m+2)$ côtés; donc il est général.

Pour démontrer la deuxième partie, remarquons qu'on aura, en appliquant le théorème I au cas de l'octogone, par exemple,

$$(1)(2)(3)\ldots(8)=(D_1D_2D_3D_4)^2,$$

en désignant par D_1, D_2, ... les diagonales; d'où

$$(1)(3)(5)(7) = (2)(4)(6)(8) = D_1 D_2 D_3 D_4.$$

Si la conique donnée est un cercle, les deux théorèmes précédents donnent des produits égaux, et non plus dans un rapport constant.

Appliquons le théorème I à un polygone de m côtés et aux droites qui joignent les sommets de 2 en 2, par exemple; nous aurons une égalité de la forme

$$(1)(2)(3)\ldots(m) = \lambda(u)(v)(w)\ldots$$

en désignant par λ un facteur constant, qui se réduit à l'unité quand la conique est un cercle, et en désignant par $(u), (v), \ldots$ les distances de M aux droites qui joignent les sommets de 2 en 2. Or, l'équation précédente, si l'on y remplace les coordonnées de M par des coordonnées courantes, représente une courbe de degré m, formée, d'une part, de la conique donnée et, d'autre part, d'une courbe restante de degré $(m - 2)$, qui passe par les points de rencontre des côtés du polygone et des droites qui joignent les sommets de 2 en 2. Tous les points de cette courbe restante jouissent donc de la propriété exprimée par l'égalité précédente.

Le théorème II donne lieu à la même remarque.

Considérons, maintenant, quelques cas particuliers; nous énoncerons les résultats sans démonstration.

Un hexagone étant inscrit dans une conique, le produit des distances d'un point quelconque de la droite de Pascal aux côtés numérotés 1, 3, 5 est dans un rapport constant avec le produit des distances aux côtés 2, 4, 6, et avec le produit des distances aux diagonales.

Un triangle étant inscrit dans une circonférence, si l'on mène les tangentes aux sommets, la droite qui passe par les points de rencontre de ces tangentes et des côtés jouit de la propriété que le produit des distances d'un point de cette droite aux trois côtés est égal au produit des distances de ce point aux trois tangentes.

Un polygone régulier est inscrit dans une circonférence; les tangentes aux sommets forment un second polygone régulier dont les côtés rencontrent ceux du premier polygone en des points situés sur des circonférences concentriques; le produit des distances d'un point quelconque d'une de ces circonférences aux côtés du polygone est égal au produit des distances de ce point aux tangentes.

Un polygone est inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique, bitangente à la première le long d'une droite D. Les côtés du polygone et les droites qui joignent les sommets de 2 en 2, par exemple, se coupent en des points qui sont situés sur des coniques bitangentes à la première le long de D, et aussi sur la droite D si le nombre des côtés est impair; le produit des distances d'un point quelconque de la droite D ou d'une de ces coniques aux côtés du polygone est dans un rapport constant avec le produit des distances de ce point aux droites qui joignent les sommets de 2 en 2.

Même résultat pour les droites qui joignent les sommets de 3 en 3, de 4 en 4, ...

Considérons encore un polygone d'un nombre pair de côtés, inscrit dans une conique et circonscrit à une autre conique quelconque; l'équation symbolique

$$(1)(3)(5)(7)\ldots = (2)(4)(6)(8)(10)\ldots$$

représente d'abord la conique dans laquelle le polygone est inscrit, puis une courbe restante formée elle-même de coniques, auxquelles vient s'adjoindre une droite quand le nombre des côtés est de la forme $(4m+2)$; ce sont ces coniques dont les points jouissent de la propriété indiquée par l'équation.

Si un polygone de $(4m+2)$ côtés est inscrit dans une circonférence et circonscrit à une autre circonférence, les côtés opposés se coupent deux à deux sur une droite; le produit des distances d'un point quelconque de cette droite aux côtés numérotés 1, 3, 5,... est égal au produit des distances de ce point aux côtés numérotés 2, 4, 6, ...

Théorème III. — *Il existe une relation linéaire et homogène entre les inverses des distances d'un point quelconque d'une conique aux côtés d'un polygone inscrit.*

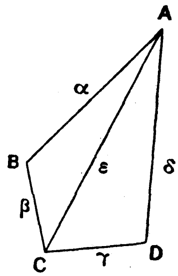
$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ étant les équations des côtés d'un triangle, l'équation d'une conique circonscrite peut s'écrire

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\lambda} = 0,$$

a, b, c étant des constantes.

Soit un quadrilatère ABCD et une conique circonscrite; les

Fig. 3.



deux triangles ABC, ACD donneront lieu aux deux équations suivantes de la conique circonscrite :

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\varepsilon} = 0,$$

$$-\frac{c}{\varepsilon} + \frac{d}{\gamma} + \frac{e}{\delta} = 0.$$

Donc tout point de la conique satisfait à une équation de la forme

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{d}{\gamma} + \frac{e}{\delta} = 0;$$

le théorème se démontre de proche en proche.

L'équation de la conique est donc renfermée dans l'équation

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \ldots + \frac{l}{\lambda} = 0,$$

qui représente la conique d'une part et, d'autre part, une courbe restante de degré $(m - 3)$ si le polygone a m côtés; cette courbe restante jouit donc de la même propriété que la conique. Ainsi, dans le cas du quadrilatère, c'est la droite qui joint les points de rencontre des côtés opposés; dans le cas du pentagone, c'est la conique qui passe par les cinq points où se coupent les côtés, points autres que les cinq sommets situés sur la conique donnée.

THÉORÈME IV. — *Un polygone de m côtés étant inscrit dans une conique, les m sommets de ce polygone et les* $m(m-4)$ *points où les côtés sont rencontrés respectivement par les droites qui joignent les sommets de p en p appartiennent à une même courbe de degré* $(m-2)$.

Ce théorème résulte de ce qui précède.

Considérons, par exemple, un hexagone et les droites qui joignent les sommets de 2 en 2; nous aurons 18 points d'une même courbe du quatrième degré.

THÉORÈME V. — *Trois courbes,* C, S, Σ, *font partie d'un faisceau d'ordre m; deux autres courbes,* S′, Σ', *font partie avec* C *d'un faisceau d'ordre m; les* $2m^2$ *points de rencontre de* S *avec* Σ' *et de* S′ *avec* Σ *sont sur une courbe* C′ *de degré m.*

En effet, tout point de la courbe C satisfait à chacune des équations

$$S = \lambda\Sigma, \qquad S' = \mu\Sigma',$$

et, par suite, à l'équation

$$SS' = \lambda\mu\Sigma\Sigma';$$

cette équation, qui représente la courbe C, représente donc aussi une autre courbe C′ qui passe par les points communs à S et Σ', et aussi à S′ et Σ.

En écrivant $S\mu\Sigma' = S'\lambda\Sigma$, on voit qu'il existe une courbe C″ de degré m passant par les points communs à S et S′, et à Σ et Σ'.

Considérons, par exemple, une cubique et un système A de 3 droites et un autre système B de 3 droites, tels que leurs 9 points communs appartiennent à la cubique; puis deux autres systèmes analogues A′, B′; les 18 points de rencontre de A avec B′, et de A′ avec B, sont sur une même cubique; le produit des distances d'un point quelconque de cette cubique aux 6 droites des groupes A, A′ est proportionnel au produit des distances de ce même point aux 6 droites des groupes B, B′.

Résultat analogue pour deux groupes de 4 points sur une conique quelconque. Transformons par polaires réciproques; nous aurons le résultat suivant :

Étant donnés deux quadrilatères ABCD, A′BC′D (B et D étant deux sommets opposés communs aux deux quadrilatères), s'il existe une conique inscrite à ABCD et ayant A′ et C′ comme foyers, il existe une conique inscrite à A′BC′D et ayant A et C comme foyers.