F. LUCAS

Note relative aux points d'intersection des courbes algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 47-53
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__47_1>

NOTE RELATIVE AUX POINTS D'INTERSECTION DES COURBES ALGÉBRIQUES;

Par M. Félix Lucas.

On sait que le groupe des points d'intersection de deux courbes algébriques planes du même degré présente, lorsque ce degré surpasse 2, cette intéressante particularité qu'il existe entre ces points certaines liaisons inévitables. S'il s'agit, par exemple, de deux cubiques, leurs neuf points d'intersection sont tels que huit d'entre eux déterminent le neuvième, car toutes les cubiques du faisceau déterminé par ces huit points passent nécessairement par ce neuvième. S'agit-il, plus généralement, de deux courbes du degré m supérieur à 2, il suffit de

$$\frac{m(m+3)}{2}-1$$

points quelconques du plan pour déterminer un faisceau de ces courbes lesquelles ont m^2 points communs, en sorte que

$$\frac{m(m-3)}{2}+1$$

points viennent s'adjoindre aux précédents en se liant avec eux.

Parmi les conséquences intéressantes qui résultent de ces liaisons, nous nous proposons ici d'en étudier une dont voici l'indication. Si l'on sépare un point du groupe des m^2 pivots, en imposant à une courbe algébrique passant par les m^2-1 autres pivots la condition de ne pas passer par le premier, le degré de cette courbe sera nécessairement supérieur à m. Quel sera le minimum possible du degré et quelle sera l'équation générale de la courbe? Tel est le problème que nous allons résoudre.

Je prends pour origine des coordonnées (les axes rectangulaires restant quelconques) celui des m^2 pivots qui doit être isolé du groupe. Les équations des deux courbes du degré m qui déterminent ces m^2 pivots seront alors dépourvues de terme constant; désignons ces équations par

$$\mathrm{U}=0 \tag{1}$$

et

$$\mathrm{V}=0. \tag{2}$$

Considérant la première, je divise le coefficient de chacun de ses termes par le degré de ce terme, et j'obtiens l'équation d'une courbe auxiliaire du même degré m,

$$u=0; \tag{3}$$

je puis alors écrire l'équation (1) sous la forme

$$\mathrm{U}=xu'_x+yu'_y=0. \tag{4}$$

Opérant de même pour l'équation (2), je considère la courbe auxiliaire

$$v = 0, \tag{5}$$

et je puis écrire

$$V = xv'_x + yv'_y = 0. \tag{6}$$

Prenons le rapport $\frac{y}{x}$ dans chacune des équations (4) et (6) et égalons les deux valeurs de ce rapport, nous aurons

$$W = u'_x v'_y - u'_y v'_x = 0, \tag{7}$$

équation du degré $2(m-1)$. Cette courbe passe par les (m^2-1) pivots, autres que l'origine des coordonnées, communs aux deux courbes U et V; elle passe, d'autre part, par les $(m-1)^2$ pivots du faisceau de courbes du degré $(m-1)$

$$u'_x + \lambda u'_y = 0,$$

λ désignant un paramètre arbitraire, ainsi que par les $(m-1)^2$ pivots du faisceau de courbes du degré $(m-1)$

$$v'_x + \lambda v'_y = 0.$$

Le nombre total des points ainsi désignés appartenant à la courbe W est

$$3m^2 - 4m + 1;$$

il est supérieur, lorsque m surpasse 2, au nombre

$$2m^2 - m - 1$$

des points nécessaires pour déterminer une courbe du même degré $2(m-1)$ que la courbe W; la valeur de l'excès dont il s'agit est $m^2 - 3m + 2$.

Cela posé, désignons par φ et ψ deux polynomes du degré $(m-2)$ à coefficients arbitraires, et formons l'équation

$$U\varphi + V\psi + W = 0; \tag{8}$$

nous aurons l'équation générale des courbes du degré $2(m-1)$ qui passent par les (m^2-1) pivots, autres que l'origine des coordonnées, communs aux deux courbes U et V. Je dis *l'équation générale;* en voici le motif. Pour déterminer une courbe du degré

$2(m-1)$ à laquelle on impose préalablement la condition de passer par m^2-1 points donnés, il est nécessaire et suffisant de se donner $m(m-1)$ autres points de cette courbe. Comme ce nombre $m(m-1)$ est précisément celui des coefficients arbitraires introduits dans l'équation (8) par les polynomes φ et ψ, on déterminera ces paramètres, considérés comme des inconnues, au moyen d'un système de $m(m-1)$ équations linéaires à nombre égal d'inconnues. Encore faut-il que les $m(m-1)$ points considérés ne soient pas groupés de manière à rendre incompatibles les équations linéaires; pour ne citer qu'un cas d'impossibilité, lequel est d'une complète évidence, indiquons la disposition de plus de $2(m-1)$ points sur une ligne droite qui passerait par l'origine des coordonnées. Si certains groupements des $m(m-1)$ points conduisaient à des cas d'indétermination, on pourrait imposer aux coefficients des polynomes φ et ψ quelques conditions supplémentaires. Quoi qu'il en soit, nous pouvons regarder comme un fait acquis que *l'équation* (8) *est l'équation générale des courbes du degré* $2(m-1)$ *qui passent par les* $(m-1)^2$ *points d'intersection* (*autres que l'origine des coordonnées*) *des deux courbes* U *et* V.

Dans cette équation (8) le nombre des termes du plus haut degré (c'est-à-dire du degré $2m-2$) est égal à $2m-1$, alors que le nombre des coefficients des termes du plus haut degré (c'est-à-dire du degré $m-2$) dans l'ensemble des deux polynomes φ et ψ est seulement de $2m-2$. Il est par conséquent impossible de choisir ces coefficients de manière à abaisser d'une unité le degré de l'équation (8). Cette observation nous indique qu'il ne doit pas exister de courbes d'un degré inférieur à $2(m-1)$ pouvant passer par les m^2-1 pivots, autres que l'origine des coordonnées, des courbes U et V, sans passer en même temps par cette origine. Encore reste-t-il à démontrer, pour confirmer cette prévision, que le premier membre de l'équation (8) ne peut pas se décomposer en deux facteurs dont l'un représenterait une courbe ne passant par aucun des pivots des courbes données U et V; voici d'abord à ce sujet une observation très simple.

Supposons qu'une courbe

$$\mu = 0,$$

d'un degré supérieur à m mais inférieur à $2(m-1)$, passe par les m^2-1 pivots sans passer par l'origine des coordonnées; nous pourrons lui adjoindre une courbe entièrement arbitraire

$$\nu = 0,$$

d'un degré égal à l'excès de $2(m-1)$ sur le degré de la courbe μ, cette courbe ν ne passant par aucun des m^2 points d'intersection de U et de V. L'équation, du degré $2(m-1)$,

$$\mu\nu = 0, \tag{9}$$

devra se trouver comprise dans l'équation générale (8); il devra donc être possible de déterminer les coefficients des polynomes φ et ψ de manière à identifier les premiers membres des équations (8) et (9). Or, en supposant, ce qui est permis, que dans chacun des polynomes mis en cause la valeur absolue du terme constant soit égale à l'unité, nous voyons que, dans chacun des premiers membres des équations (8) et (9), le nombre des coefficients (autres que le terme constant) est égal à $2m^2-m-1$, tandis que dans l'ensemble des polynomes φ et ψ le nombre des coefficients n'est que de m^2-m. Par conséquent l'identification des deux équations (8) et (9) exigerait la solution de $2m^2-m-1$ équations à m^2-m inconnues seulement; il ne paraît pas téméraire d'admettre que cette insuffisance du nombre des inconnues démontre l'impossibilité de l'identification.

Quoi qu'il en soit, on peut arriver au but avec une rigueur incontestable par le raisonnement suivant, qui nous a été indiqué par notre collègue de la Société mathématique, M. Blutel.

Dans la courbe arbitraire

$$\nu = 0,$$

nous pouvons faire entrer la droite

$$x = x_0,$$

parallèle à l'axe des y et assujettie à cette seule condition de ne passer par aucun des points communs aux courbes données U et V. En faisant $x = 0$ dans l'équation (8), nous obtiendrons l'identité, par rapport à y,

$$U_0\varphi_0 + V_0\psi_0 + W_0 = 0. \tag{10}$$

Attribuons à y la valeur d'une des m racines de l'équation

$$U_0 = o,$$

que nous pouvons également écrire sous la forme

$$(11) \qquad x_0(u'_x)_0 + y(u'_y)_0 = o;$$

l'identité (10) deviendra

$$V_0\psi_0 + W_0 = o,$$

ou, sous une autre forme

$$(12) \qquad [x_0(v'_x)_0 + y(v'_y)_0]\psi_0 + (u'_x)_0(v'_y)_0 - (u'_y)_0(v'_x)_0 = o.$$

Prenons dans (11) la valeur de $(u'_x)_0$ et portons-la dans (12); il viendra, réductions faites,

$$(13) \qquad V_0[x_0\psi_0 - (u'_y)_0] = o.$$

Le premier facteur V_0 ne peut pas être nul, car, s'il l'était, le point (x_0, y), qui appartient à la droite $x = x_0$, serait commun aux deux courbes U et V, contrairement à l'hypothèse que nous avons faite sur cette droite. Il faut donc que le second facteur soit nul et cela pour chacune des m valeurs racines de $U_0 = o$ qu'il nous est possible d'attribuer à y; par conséquent ce second facteur est identiquement nul; il en résulte que notre droite $x = x_0$ doit faire partie de la courbe

$$(14) \qquad x\psi - u'_y = o.$$

En prenant dans (11) la valeur de $(u'_y)_0$, au lieu de $(u'_x)_0$, pour la porter dans (12) et raisonnant ensuite comme ci-dessus, nous trouverons que notre droite $x = x_0$ doit faire partie de la courbe

$$(15) \qquad y\psi + u'_x = o.$$

Puisque les deux premiers membres des équations (14) et (15) sont divisibles par $(x - x_0)$, il en est de même du premier membre de l'équation

$$(16) \qquad xu'_x + yu'_y = o,$$

que nous obtenons en éliminant ψ entre (14) et (15).

Or le premier membre de cette équation (16) est identiquement le polynome U. Nous arrivons donc à ce résultat inadmissible que notre droite $x=x_0$, laquelle est tout à fait arbitraire, ferait partie de la courbe $U=0$. Il faut donc rejeter l'hypothèse de l'existence d'une courbe d'un degré inférieur à $2(m-1)$ qui passerait par les m^2-1 points d'intersection, autres que l'origine des coordonnées, des courbes U et V, sans passer en même temps par ladite origine des coordonnées.

De là ce théorème : *Il est impossible de faire passer une courbe de degré inférieur à* $2(m-1)$ *par tous les points d'intersection sauf un de deux courbes du degré m.*

La théorie que nous venons d'exposer peut être généralisée en attribuant aux polynomes U et V deux degrés différents m et n; le polynome auxiliaire W est alors du degré $m+n-2$. On trouve ainsi *qu'il est impossible de faire passer une courbe d'un degré inférieur à* $(m+n-2)$ *par tous les points d'intersection sauf un de deux courbes des degrés m et n.* Et l'équation générale des courbes de ce degré satisfaisant à la condition indiquée est

$$U\varphi + V\psi + W = 0,$$

φ et ψ désignant des polynomes dont les degrés respectifs sont $(n-2)$ et $(m-2)$.