BULLETIN DE LA S. M. F.

G. COMBEBIAC

Sur la génération des métriques

Bulletin de la S. M. F., tome 36 (1908), p. 133-141

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__133_1>

SUR LA GÉNÉRATION DES MÉTRIQUES;

PAR M. G. COMBEBIAC.

Les lignes qui jouent le rôle d'axes dans une métrique hyperbolique (c'est-à-dire justiciable de la doctrine de Lobatchewsky) doivent posséder les propriétés géométriques attribuées aux lignes droites, à l'exception de celle qui est exprimée par le postulatum. On se propose de démontrer qu'elles doivent remplir en outre une autre condition, qui se substitue, dans ce cas, au postulatum, de sorte que celui-ci devient un cas singulier de la condition d'existence d'une métrique; lorsque cette condition supplémentaire est remplie, la métrique est complètement déterminée par ses axes.

I.

Pour obtenir de telles lignes, il suffit d'établir une correspondance parfaite et continue entre l'espace entier et le volume V intérieur à une surface fermée convexe S. Les lignes D qui correspondent, dans l'espace, aux segments rectilignes contenus dans le volume V satisfont aux conditions requises, savoir : détermination par deux points et existence de surfaces jouant le rôle des plans.

Ces propriétés suffisent pour permettre d'établir une géométrie projective par rapport aux lignes considérées en suivant pas à pas l'œuvre de Von Staudt et en n'utilisant, par conséquent, que la notion d'intersection à l'exclusion de toute idée métrique.

On peut d'ailleurs, pour l'étude de ces lignes, substituer l'analyse aux procédés géométriques en établissant au préalable, au moyen de la méthode indiquée par Von Staudt, un système de coordonnées projectives faisant correspondre trois nombres réels X, Y, Z à tout point de l'espace, à l'exception des points situés sur un certain *plan* et pour lesquels les coordonnées prennent à la limite des valeurs infinies. Un tel système est défini par trois axes concourants sur chacun desquels deux des coordonnées ont des valeurs nulles, par le *plan* des coordonnées infinies et par le *plan* qui a pour équation, par exemple,

$$X + Y + Z = 1.$$

A tout système de valeurs réelles (X, Y, Z) ne correspond pas nécessairement un point de l'espace. C'est ainsi qu'une équation linéaire à coefficients réels pourra n'être satisfaite par les coordonnées d'aucun point de l'espace; mais elle n'en déterminera pas moins, pour deux faisceaux quelconques de lignes D, une correspondance bien définie et ayant toutes les propriétés projectives qui caractérisent les correspondances déterminées de cette manière par des *plans* réels (correspondances homographiques présentant certaines propriétés particulières). L'observation s'applique également aux équations quelconques, et rien n'empêche d'étendre, pour la généralité du langage, la dénomination de surface aux entités géométriques ainsi définies et dont chacune détermine, à défaut de points, une correspondance entre deux faisceaux quelconques de lignes D. Si l'équation est algébrique, la correspondance pourra être définie au moyen de propriétés projectives, c'est-à-dire ne mettant en jeu que la notion d'intersection. Enfin, moyennant cette interprétation, on peut dire que toute surface algébrique est transformée par une transformation projective en une surface du même degré.

Le système de coordonnées ainsi établi réalise aussi une représentation du volume V, puisque toute construction projective dans l'un des domaines a une correspondante dans l'autre, l'application étant supposée parfaite et continue. La surface S est formée de points-limites du volume V; par suite, la surface (au sens étendu qui a été défini) qui lui correspond et son équation

$$f(X, Y, Z) = 0 \tag{1}$$

sont parfaitement déterminées comme limites en fonction des lignes D (on pourrait ne s'attacher qu'à l'un des points de vue, analytique ou constructif). L'équation (1) représente, en définitive, la correspondance à double détermination qui existe entre une ligne D d'un faisceau et les lignes D d'un autre faisceau qui rencontrent la première à l'infini, correspondance elle-même bien déterminée puisque les secondes lignes le sont comme positions-limites. L'existence et la signification de l'équation (1) sont donc bien établies. On dira que cette équation représente les *points à l'infini* ou la *surface de l'infini* relative aux lignes D.

On pourrait supposer que la surface S, au lieu d'être fermée, s'étende à l'infini tout en étant convexe vers la région extérieure au volume V. Celui-ci s'étendrait alors à l'infini, de sorte que, pour avoir la *surface* bornant ce volume, il faudrait joindre à l'équation (1) celle du plan de l'infini de l'espace auquel appartient le volume V. Ces deux équations (abstraction faite des éléments impropres qui ne sont pas points-limites du volume V) représentent également la surface de l'infini relative aux lignes D; cette surface ne se réduira donc à une surface du premier ordre que si la surface S se confond elle-même avec le plan de l'infini de l'espace qui la contient. Dans ce cas, les lignes D, d'après leur génération même, seront les correspondantes des lignes droites dans une application parfaite et continue de l'espace sur lui-même, et, par suite, elles satisferont au postulatum.

Réciproquement, il est évident que les lignes D ne satisferont au postulatum que dans ce cas.

Le postulatum est donc équivalent à cette proposition : *la surface de l'infini est du premier ordre,* c'est-à-dire : la correspondance établie par la rencontre à l'infini entre les lignes de deux faisceaux est homographique et possède toutes les propriétés de celles qui sont déterminées par la rencontre sur un plan donné.

Sous cette forme particulièrement positive, le postulatum apparaît avec son vrai caractère, qui est nettement projectif.

II.

Cherchons à définir une métrique hyperbolique ayant pour axes les lignes D. L'expression de la distance doit, comme on sait, être de la forme

$$(2)\qquad F = c \log \frac{\Omega_{XX'} + \sqrt{\Omega_{XX'}^2 - \Omega_{XX}\,\Omega_{X'X'}}}{\Omega_{XX'} - \sqrt{\Omega_{XX'}^2 - \Omega_{XX}\,\Omega_{X'X'}}} \text{ (}^{1}\text{)},$$

où Ω_{XX} est une expression quadratique en X, Y, Z; $\Omega_{X'X'}$ et $\Omega_{XX'}$ les expressions correspondantes en X′, Y′, Z′ et X, Y, Z, X′, Y′, Z′; on supposera en outre que Ω corresponde à un ellipsoïde réel.

Pour que les axiomes habituels soient satisfaits (notamment, il doit toujours exister, sur un axe quelconque, à partir d'un point quelconque et dans un sens donné, un et un seul segment égal à un segment donné), il faut que l'expression (2) prenne des valeurs réelles pour tout couple de points et devienne infinie lorsque l'un des points s'éloigne indéfiniment. Il faut donc que la surface de l'infini se confonde avec celle qui est déterminée par l'équation

$$\Omega_{XX} = 0.$$

Il est donc nécessaire que les lignes D soient telles que la surface de l'infini qu'elles déterminent soit du second ordre (par rapport à ces lignes), condition susceptible d'une définition projective et qui se rapporte en définitive à la correspondance déterminée entre deux faisceaux quelconques de lignes D par la condition d'intersection à l'infini.

Dans le système de coordonnées employé, Ω_{XX} sera alors déterminé à un facteur constant près, qui est sans effet sur la métrique correspondante; celle-ci sera donc également déterminée.

Cherchons maintenant à définir une métrique parabolique ayant pour axes des lignes D données.

On obtient une telle métrique en prenant pour la distance une expression de la forme

$$\sqrt{\frac{\Omega_{XX}}{R_X^2} + \frac{\Omega_{X'X'}}{R_{X'}^2} - 2\,\frac{\Omega_{XX'}}{R_X R_{X'}}},$$

où R est un polynome du premier degré à coefficients réels. Cette

(1) X, Y, Z sont des nombres; c est une *longueur* (au sens relatif à la métrique considérée), savoir celle du segment pris sur l'axe des X à partir de l'origine et ayant pour extrémité le point qui forme, avec l'origine et les points de rencontre de cet axe avec l'ellipsoïde Ω, un rapport anharmonique égal à e.

expression ne change pas de valeur lorsqu'on y remplace Ω par $\Omega + \lambda R^2$, où λ est une constante arbitraire, c'est-à-dire lorsqu'on substitue à la quadrique déterminée par Ω une autre quadrique passant par l'intersection de la première avec le plan R et pour laquelle on peut prendre un cône; on peut donc écrire Ω sous la forme de trois carrés qu'on supposera tous positifs,

$$\Omega = \Sigma A_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3), \qquad \Omega_{XX'} = \Sigma A_{iX} A_{iX'};$$

enfin on peut prendre pour plan des coordonnées infinies le plan R, c'est-à-dire réduire R à une constante. L'expression précédente peut donc toujours être mise sous la forme

$$(3) \qquad \sqrt{\Sigma(A_{iX'} - A_{iX})^2};$$

les termes constants des polynomes A_i peuvent d'ailleurs être supprimés.

Cette expression ne prend des valeurs infinies que lorsque l'un des points appartient au plan des coordonnées infinies; ce plan doit donc se confondre avec la surface de l'infini et, par suite, les lignes D doivent satisfaire au postulatum, d'après l'équivalence établie plus haut de ce dernier. Cette condition étant remplie, toute expression de la forme (3) définira une métrique parabolique ayant pour axes les lignes données.

Les résultats de ces deux paragraphes peuvent être résumés de la manière suivante :

Pour que des lignes possédant les mêmes propriétés géométriques que les lignes droites, abstraction faite du postulatum, puissent être les axes d'une métrique, il faut et il suffit que la surface de l'infini qu'elles déterminent en raison de leurs propriétés projectives soit du premier ou du second ordre. Dans le second cas, elles donnent lieu à une et une seule métrique, qui est hyperbolique ; dans le premier cas, elles peuvent servir d'axes à une infinité de métriques paraboliques correspondant respectivement aux diverses coniques *imaginaires situées dans le* plan *de l'infini.*

Ces conclusions s'étendent évidemment à tous les continus à *n* dimensions applicables exactement sur l'ensemble formé par les systèmes de valeurs réelles de *n* nombres.

Il est facile de reconnaître que les métriques elliptiques (dans les continus qui les admettent) ne donnent pas lieu à de semblables conditions. C'est ainsi qu'en Géométrie sphérique, par exemple, si l'on prend pour coordonnées projectives (homogènes), par rapport aux grands cercles, les coordonnées rectangulaires d'un point, l'origine des coordonnées étant le centre de la sphère, on pourra toujours prendre pour expression d'une distance

$$2c \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\,\Omega_{x'x'} - \Omega_{xx'}^2}}{\Omega_{xx'}},$$

où Ω est une expression quadratique à coefficients réels et à valeurs toujours positives; on obtient la métrique sphérique ordinaire en prenant

$$\Omega_{xx} = x^2 + y^2 + z^2.$$

III.

La propriété projective qui se substitue au postulatum dans les métriques hyperboliques peut être établie au moyen des procédés ordinaires de la Géométrie non euclidienne.

Si x, y, z désignent, en métrique de Lobatchewsky, les longueurs interceptées sur trois axes rectangulaires Ox, Oy et Oz par les perpendiculaires abaissées d'un point M sur ces axes, on obtient un système de coordonnées projectives en prenant

$$\mathrm{X} = \operatorname{th} \frac{x}{2c}, \qquad \mathrm{Y} = \operatorname{th} \frac{y}{2c}, \qquad \mathrm{Z} = \operatorname{th} \frac{z}{2c}.$$

On reconnaît en effet facilement, en s'appuyant sur les formules connues de résolution des triangles en métrique de Lobatchewsky, que les axes (ou lignes droites) sont représentés par des équations de la forme

$$\mathrm{X} = a + bt, \qquad \mathrm{Y} = a' + b't, \qquad \mathrm{Z} = a'' + b''t.$$

D'autre part, on vérifie aussi, au moyen des formules relatives aux triangles rectangles, que, si ρ désigne la distance du point x, y, z à l'origine, on a

$$\operatorname{th} \frac{\rho}{2c} = \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{x}{2c} + \operatorname{th}^2 \frac{y}{2c} + \operatorname{th}^2 \frac{z}{2c}} = \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}.$$

La surface de l'infini a donc pour équation

$$\Omega_{XX} \equiv X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0,$$

et, par suite, est bien une quadrique.

Les systèmes de coordonnées (x, y, z) et (X, Y, Z) ne réalisent ni l'un ni l'autre une représentation parfaite de l'espace, puisqu'aucun point réel ne correspond aux systèmes de valeurs pour lesquels on a

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 \geqq 0.$$

On obtient, au contraire, un système de coordonnées satisfaisant à cette condition en posant

$$x' = \frac{X}{R}\log\frac{1+R}{1-R}, \qquad y' = \frac{Y}{R}\log\frac{1+R}{1-R}, \qquad z' = \frac{Z}{R}\log\frac{1+R}{1-R}$$

$$(R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}),$$

ce qui donne

$$X = \frac{x'}{r'}\frac{e^{r'}-1}{e^{r'}+1} = \frac{x'}{r'}\operatorname{th}\frac{r'}{2}, \qquad Y = \frac{y'}{r'}\operatorname{th}\frac{r'}{2}, \qquad Z = \frac{z'}{r'}\operatorname{th}\frac{r'}{2}$$

$$(r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}).$$

Réciproquement, l'espace étant rapporté à un système de coordonnées (x', y', z') réalisant une représentation parfaite et continue, les formules précédentes définiront une métrique hyperbolique. Si, en particulier, x', y', z' sont des coordonnées trirectangulaires ordinaires, on voit que les droites passant par l'origine sont des axes de la métrique; pour deux points situés sur l'une de ces droites, c'est-à-dire tels qu'on ait, pour chacun d'eux,

$$\frac{x'}{X} = \frac{y'}{Y} = \frac{z'}{Z} = \frac{r'}{R},$$

on trouve, pour expression de la distance, $r'_2 - r'_1$; la métrique considérée se confond donc, pour ces points, avec la métrique ordinaire.

Le plan des xy est une surface d'axes et les axes situés dans ce plan ont pour équation générale

$$\frac{1}{r'}\frac{e^{r'}-1}{e^{r'}+1}(Ax' + By') + C = 0.$$

On peut suivre sur cet exemple toutes les propriétés qui font l'objet de la Géométrie non euclidienne avec l'avantage appréciable de raisonner sur des concepts et non pas seulement sur des combinaisons de mots.

Pour les continus à une dimension ouverts (applicables exactement sur l'ensemble des nombres réels), les deux expressions de la distance peuvent s'écrire

$$\log\frac{a-X'}{X'-b}-\log\frac{a-X}{X-b} \qquad \text{et} \qquad X'-X.$$

Elles sont évidemment réductibles l'une à l'autre et *ne donnent lieu,* par conséquent, *à aucun classement des métriques.* Si x et x' désignent les distances de deux points, dans une métrique déterminée, à un point O pris pour origine, les deux expressions précédentes rentrent dans la formule générale

$$f(x')-f(x),$$

où $f(x)$ est une fonction croissante ou décroissante, toujours déterminée et prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

On voit qu'une telle métrique est toujours archimédienne, la quantité

$$n[f(b)-f(a)]$$

croissant indéfiniment avec le nombre entier n.

Pour qu'un ensemble ordonné M admette des métriques archimédiennes, il faut, non seulement qu'il soit applicable sur lui-même de manière qu'on puisse faire se correspondre deux éléments quelconques (condition évidente d'existence des métriques), mais il faut encore que, si l'on forme un ensemble ordonné en mettant à la suite l'un de l'autre n ensembles identiques à un segment quelconque de M, le dernier élément de chaque ensemble coïncidant avec le premier élément du suivant, l'ensemble ainsi formé puisse être appliqué sur l'ensemble M de manière à englober, pour n suffisamment grand, deux éléments quelconques de M.

Cette condition, évidemment indépendante de toute idée métrique, est remplie pour les continus; elle ne l'est pas pour l'ensemble ordonné de fonctions cité comme exemple par M. Hilbert dans ses *Grundlagen der Geometrie.*

Si je signale ces remarques particulièrement évidentes, c'est moins pour leur intérêt propre que parce qu'elles donnent une idée de la simplicité, de la clarté et de la brièveté qu'aurait une théorie générale des métriques fondée, comme l'est déjà actuellement l'Analyse mathématique elle-même, sur les concepts d'ensemble et d'ordre. On ne manquerait pas d'ailleurs de retrouver, établies cette fois en toute lucidité, toutes les conceptions édifiées au moyen de *conventions* dont le moindre défaut est de se rapporter à des objets non définis et qui d'ailleurs peuvent fort bien, tout en n'étant pas *contradictoires* entre elles, n'être compatibles que moyennant la réalisation d'une condition supplémentaire telle que celle qui est mise en évidence dans cette étude pour les métriques à n dimensions. Enfin une telle méthode est la seule pleinement satisfaisante pour ceux qui pensent (avec G. Cantor, par exemple) qu'en Mathématiques, tout comme en Physique, on découvre et l'on ne crée pas.