BULLETIN DE LA S. M. F.

DAUTHEVILLE

Sur les systèmes non holonomes

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 120-132

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__120_0>

SUR LES SYSTÈMES NON HOLONOMES;

PAR M. DAUTHEVILLE.

On sait, depuis les travaux de M. Appell, que les équations du mouvement d'un système non holonome peuvent être mises sous une forme analogue à celle des équations de Lagrange, les seconds membres contenant des termes correctifs. On a ainsi les *équations de Lagrange corrigées.* Si l'on se propose de ramener ces équations au premier ordre, on obtient les *équations canoniques corrigées,* qui diffèrent des équations canoniques par des termes correctifs ajoutés aux seconds membres. Certains théorèmes de la Dynamique des systèmes holonomes subsistent pour les systèmes non holonomes; d'autres doivent être modifiés. En particulier, le théorème de Poisson ne s'applique pas aux systèmes non holonomes sous la forme qui convient aux systèmes holonomes. Lorsque l'on connaîtra deux intégrales des équations canoniques corrigées, on pourra encore en former une troisième. Mais il faudra, pour cela, trouver une solution particulière d'un système d'équations différentielles linéaires; en outre, l'intégrale formée n'a plus la forme simple qui convient aux systèmes holonomes. Nous nous proposons d'attirer l'attention sur ces divers points.

I. — ÉQUATIONS CANONIQUES CORRIGÉES.

Nous considérerons, pour plus de simplicité, un système non holonome dont les liaisons sont sans frottement et indépendantes du temps, et qui sera sollicité par des forces dérivant d'une fonction des forces U, qui ne contiendra pas explicitement le temps. Rappelons d'abord les résultats qu'on doit à M. Appell (1).

Soient q_1, q_2, ..., q_n les paramètres indépendants dont l'ex-

(1) *Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la Dynamique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 5e série, t. VII, 1901, p. 5).

pression en fonction du temps détermine à chaque instant la position du système.

Posons

$$(1)\qquad q'_i = \frac{dq_i}{dt}, \qquad q''_i = \frac{d^2 q_i}{dt^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si l'on appelle $2T$ la force vive, et $2S$ l'énergie d'accélération, on a

$$(2)\qquad \begin{cases} T = \varphi_1(q'_1, q'_2, \ldots, q'_n), \\ S = \varphi_2(q''_1, q''_2, \ldots, q''_n) + \psi_1 q''_1 + \ldots + \psi_n q''_n + \chi, \end{cases}$$

où φ_1 est une forme quadratique en q'; φ_2 est la forme φ_1 où l'on a remplacé les q' par les q''; les ψ sont des formes quadratiques en q'; χ est une forme du quatrième ordre en q'. Les coefficients de ces diverses formes sont des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, qui ne contiennent pas explicitement le temps. Mais ces coefficients ne sont pas indépendants les uns des autres. On a en effet l'identité

$$(3)\qquad E = \psi_1 q'_1 + \ldots + \psi_n q'_n = \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} q'_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_n} q'_n.$$

Le mouvement du système est alors donné par les équations de Lagrange corrigées :

$$(4)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} + \Delta'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$(5)\qquad \Delta'_i = \frac{\partial E}{\partial q'_i} - 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i} - \psi_i.$$

Les équations (4) admettent l'intégrale des forces vives. Multipliant, en effet, ces équations par $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ et ajoutant, on obtient

$$(6)\qquad dT = dU + (\Delta'_1 q'_1 + \ldots + \Delta'_n q'_n)\, dt.$$

Mais on a

$$\sum_i \Delta'_i q'_i = \sum_i \frac{\partial E}{\partial q'_i} q'_i - 2\sum_i \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i} q'_i - \sum \psi_i q'_i.$$

Remarquant que E est une forme du troisième ordre en q', et tenant compte de l'identité (3), il vient

$$\sum_i \Delta'_i q'_i = 3\mathrm{E} - 2\mathrm{E} - \mathrm{E} = 0.$$

L'équation (6) donne alors l'intégrale des forces vives

$$\mathrm{T} = \mathrm{U} + h.$$

Remarquons l'identité

$$(7) \qquad \sum_i \Delta'_i q'_i = 0.$$

Tels sont les résultats donnés par M. Appell.

Appliquons aux équations (4) la transformation de Poisson-Hamilton. Posons

$$p_i = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_i} \qquad (i \equiv 1, 2, \ldots, n),$$
$$\mathrm{H} = \mathrm{T} - \mathrm{U}.$$

Le raisonnement qui s'applique aux systèmes holonomes peut se répéter dans le cas qui nous occupe, et il conduit aux équations

$$(8) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i} + \Delta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où Δ_i désigne la fonction en laquelle la substitution précédente transforme Δ'_i. L'identité (7) s'écrit maintenant

$$(9) \qquad \sum_i \Delta'_i \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} = 0.$$

Les équations (8) sont les *équations canoniques* corrigées.

Cherchons la condition pour que l'équation

$$f(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = \text{const.}$$

soit une intégrale de (8). On a

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}\right) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\Delta_i \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} + (f, \mathrm{H}) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\Delta_i.
\end{aligned}$$

La condition cherchée est donc

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, \mathrm{H}) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \Delta_i = 0. \tag{10}$$

On déduit de là que, si $f =$ const. est une intégrale, $\frac{\partial f}{\partial t} =$ const. en sera une autre.

En effet, les liaisons étant indépendantes du temps, aucune des fonctions φ_1 et ψ ne contient explicitement le temps; il en est de même pour les Δ et pour E, en vertu de (3) et (5); les fonctions T et U ne contenant pas explicitement le temps, il en est de même pour H. On a alors, en prenant la dérivée partielle par rapport à t du premier membre de (10),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \mathrm{H}\right) + \sum_i \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\Delta_i = 0,$$

relation qui montre que $\frac{\partial f}{\partial t} =$ const. est une intégrale.

On voit de même que si $f =$ const. est une intégrale, et si H et les Δ sont indépendants de q_k ou de p_k, $\frac{\partial f}{\partial q_k} =$ const., ou $\frac{\partial f}{\partial p_k} =$ const., est aussi une intégrale.

On a ainsi des théorèmes relatifs aux systèmes holonomes qui se conservent pour les systèmes non holonomes que nous considérons. Mais le théorème de Poisson ne s'applique plus, du moins sous la forme qui convient aux systèmes holonomes.

Suivons le raisonnement par lequel on a coutume d'établir ce théorème. Soient $f =$ const. et $\varphi =$ const. deux intégrales des équations canoniques corrigées. On a identiquement

$$[(f, \varphi), \mathrm{H}] + [(\varphi, \mathrm{H}), f] + [(\mathrm{H}, f), \varphi] = 0.$$

Mais, puisque (10) s'applique aux fonctions f et φ, on a

$$(\varphi, \mathrm{H}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum_i \Delta_i \frac{\partial \varphi}{\partial p_i},$$

$$(\mathrm{H}, f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \Delta_i \frac{\partial f}{\partial p_i};$$

et, par suite, en utilisant les propriétés des parenthèses de

Poisson,

$$[(\varphi, H), f] = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}, f\right) - \left(\sum_i \Delta_i \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}, f\right),$$

$$[(\varphi, H), f] = \left(f, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \sum_i \Delta_i \left(f, \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right) - \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}(\Delta_i, f).$$

On trouve de même

$$[(H, f), \varphi] = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \varphi\right) + \sum_i \Delta_i \left(\frac{\partial p}{\partial p_i}, \varphi\right) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}(\Delta_i, \varphi).$$

En substituant dans (10), on obtient

$$\begin{aligned}[(f, \varphi), H] &+ \left(f, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \varphi\right) \\ &+ \sum_i \Delta_i \left[\left(f, \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}, \varphi\right)\right] + \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial p_i}(\Delta_i, \varphi) - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}(\Delta_i, f)\right] = 0,\end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(f, \varphi) + [(f, \varphi), H] &+ \sum_i \Delta_i \frac{\partial}{\partial p_i}(f, \varphi) \\ &+ \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial p_i}(\Delta_i, \varphi) - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}(\Delta_i, f)\right] = 0.\end{aligned}$$

En rapprochant cette identité de la condition (10), on voit que $(f, \varphi) = \text{const.}$ ne sera pas, en général, une intégrale. Le théorème de Poisson ne s'applique pas. Il subsisterait, si, étant donnée l'intégrale $f = \text{const.}$, on pouvait choisir la seconde intégrale $\varphi = \text{const.}$ de manière à avoir identiquement

$$\sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial p_i}(\Delta_i, \varphi) - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}(\Delta_i, f)\right] = 0.$$

Nous laisserons de côté l'examen de ce cas particulier.

II. — Théorème de Poisson corrigé.

Dans son Mémoire sur le problème des trois corps (*Acta mathematica*, t. XIII, p. 46), M. Poincaré a fait connaître les équations qu'il a appelées *équations aux variations* des équations canoniques. Il a montré que deux solutions des équations aux variations sont liées par une certaine relation, et que si les solutions sont connues cette relation constitue une intégrale des équations canoniques. On peut trouver une solution des équations aux variations quand on en connaît une intégrale, et réciproquement. Enfin, si l'on connaît une intégrale des équations canoniques, on peut trouver une solution des équations aux variations, et le théorème de Poisson est la conséquence immédiate de cette dernière remarque. En suivant, pour un système non holonome, la méthode de M. Poincaré, on obtient la généralisation du théorème de Poisson.

Reprenons les équations canoniques corrigées

$$(1) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \Delta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Considérons deux solutions infiniment voisines de ces équations q_i, p_i et $q_i + \xi_i$, $p_i + \eta_i$, les ξ, η étant assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés. Les ξ, η satisfont alors aux équations différentielles linéaires

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} = \displaystyle\sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_k} \xi_k + \sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_k} \eta_k, \\[2ex] \dfrac{d\eta_i}{dt} = -\displaystyle\sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_k} \xi_k - \sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} \eta_k + \sum_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k} \xi_k + \sum_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial p_k} \eta_k, \end{cases}$$

qui sont les équations aux variations des équations (1). Soit ξ'_i, η'_i une autre solution des équations (2), de sorte que

$$(2') \quad \begin{cases} \dfrac{d\xi'_i}{dt} = \displaystyle\sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_k} \xi'_k + \sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} \eta'_k \\[2ex] \dfrac{d\eta'_i}{dt} = -\displaystyle\sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_k} \xi'_k - \sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_k} \eta'_k + \sum_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k} \xi'_k + \sum_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial p_k} \eta'_k. \end{cases}$$

Multiplions respectivement les équations (2) et (2') par η'_i, $-\xi'_i$, $-\eta_i$, ξ_i et faisons la somme de tous les résultats obtenus; il viendra

$$\frac{d}{dt} \sum_i (\eta'_i \xi_i - \xi'_i \eta_i) + \sum_{ik} \xi'_i \left(\xi_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k} + \eta_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial p_k} \right) - \sum_{ik} \xi_i \left(\xi'_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k} + \eta'_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial p_k} \right) = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{d}{dt}\sum_i (\eta'_i\xi_i - \xi'_i\eta_i) + \sum_{ik} \xi'_k\left(\xi_i\frac{\partial\Delta_k}{\partial q_i} + \eta_i\frac{\partial\Delta_k}{\partial p_i}\right)$$
$$-\sum_{ik}\xi_i\left(\xi'_k\frac{\partial\Delta_i}{\partial q_k} + \eta'_k\frac{\partial\Delta_i}{\partial p_k}\right) = 0,$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\sum_i (\eta'_i\xi_i - \xi'_i\eta_i)$$
$$+\sum_i\left\{\xi_i\sum_k\left[\xi'_k\left(\frac{\partial\Delta_q}{\partial q_i} - \frac{\partial\Delta_i}{\partial q_k}\right) - \eta'_k\frac{\partial\Delta_i}{\partial p_k}\right] + \eta_i\sum \xi'_k\frac{\partial\Delta_k}{\partial p_i}\right\} = 0.$$

On déduit de là

$$(3)\quad \sum_i (\eta'_i\xi_i - \xi'_i\eta_i)$$
$$+\int\sum_i\left\{\xi_i\sum_k\left[\xi'_k\left(\frac{\partial\Delta_q}{\partial q_i} - \frac{\partial\Delta_i}{\partial q_k}\right) - \eta'_k\frac{\partial\Delta_i}{\partial p_k}\right] + \eta_i\sum_k \xi'_k\frac{\partial\Delta_k}{\partial p_i}\right\}dt = \text{const.}$$

Telle est la relation qui existe entre deux solutions des équations aux variations. Cette relation n'est plus algébrique, comme cela arrive pour les systèmes holonomes. Si tous les Δ sont nuls, on retrouve bien la relation

$$\sum_i (\eta'_i\xi_i - \xi'_i\eta_i) = \text{const.},$$

donnée par M. Poincaré.

Dans le cas où ξ_i, η_i; ξ'_i, η'_i seraient connues, la relation (3) serait une intégrale des équations canoniques.

Si l'on suppose que ξ'_i, η'_i désignent une solution particulière, connue, des équations (2), et ξ_i, η_i leur solution générale, la relation (3) devient une intégrale des équations aux variations. Ainsi la connaissance d'une solution particulière de ces équations en fournit encore une intégrale.

Réciproquement, supposons que nous connaissions une intégrale des équations (2),

$$(4)\quad \sum_i (A_i\xi_i + B_i\eta_i) + \int \sum_i \left\{ \xi_i \sum_k \left[B_k\left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \Delta_k}{\partial q_i}\right) - A_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k}\right] - \eta_i \sum_k B_k \frac{\partial \Delta_k}{\partial p_i} \right\} dt = \text{const.},$$

où les A, B sont donnés. On aura, en différentiant, et remarquant que ξ_i, η_i vérifient (2),

$$\begin{aligned}
&\sum_i \left(\frac{dA_i}{dt}\xi_i + \frac{dB_i}{dt}\eta_i\right) + \sum_i A_i\left(\sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial q_k}\xi_k + \sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial p_k}\eta_k\right)\\
&\quad + \sum_i B_i\left(-\sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial q_k}\xi_k - \sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial p_k}\eta_k + \sum_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k}\xi_k + \sum_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial p_k}\eta_k\right)\\
&\quad + \sum_i \xi_i \sum_k \left[B_k\left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \Delta_k}{\partial q_i}\right) - A_k\frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k}\right] - \sum_i \eta_i \sum_k B_k \frac{\partial \Delta_k}{\partial p_i} = 0.
\end{aligned}$$

On peut écrire cette relation

$$\begin{aligned}
&\sum_i \xi_i \left\{ \frac{dA_i}{dt} + \sum_k \left[B_k\left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \Delta_k}{\partial q_i}\right) - A_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial p_k}\right]\right\}\\
&\quad + \sum_i \eta_i \left(\frac{dB_i}{dt} - \sum_k \frac{\partial \Delta_k}{\partial p_i}\right) + \sum_{ik} A_k\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial p_k}\xi_i + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial p_k}\eta_i\right)\\
&\quad + \sum_{ik} B_k\left(-\xi_i\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial q_k} - \eta_i \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial q_k} + \xi_i\frac{\partial \Delta_k}{\partial q_i} + \eta_i \frac{\partial \Delta_k}{\partial p_i}\right) = 0,
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
&\sum_i \xi_i \left(\frac{dA_i}{dt} + \sum_k A_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial p_k} - \sum_k B_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial q_k} + \sum_k B_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k} - \sum_k A_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial p_k}\right)\\
&\quad + \sum_i \eta_i \left(\frac{dB_i}{dt} - \sum_k B_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial q_k} + \sum_k A_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial p_k}\right) = 0.
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit, en identifiant,

$$\begin{aligned}
\frac{dA_i}{dt} &= -\sum_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial p_k} + \sum_k B_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial q_k} - \sum_k B_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k} + \sum_k A_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial p_k},\\
\frac{dB_i}{dt} &= \sum_k B_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial q_k} - \sum_k A_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial p_k}.
\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\alpha_i = \mathrm{B}_i, \qquad \beta_i = -\mathrm{A}_i,$$

on trouve

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial p_i \, \partial q_k}\alpha_k + \sum_k \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial p_i \, \partial p_k}\beta_k,$$

$$\frac{d\beta_i}{dt} = -\sum_k \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial q_i \, \partial q_k}\alpha_k + \sum_k \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial q_i \, \partial p_k}\beta_k + \sum_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k}\alpha_k + \sum_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial p_k}\beta_k,$$

et l'on voit que α_i, β_i constituent bien une solution particulière des équations aux variations.

Il reste à examiner si la connaissance d'une intégrale des équations canoniques peut conduire à une solution des équations aux variations. Soit

$$f(q, p, t) = \text{const.}$$

une intégrale des équations canoniques.

Cette relation subsiste si l'on y remplace q, p par $q+\xi$, $p+\eta$; ξ, η étant une solution quelconque des équations aux variations. On a donc l'intégrale des équations aux variations

$$\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\xi_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\eta_i \right) = 0.$$

Si l'on peut mettre cette intégrale sous la forme (4), on en déduira, par ce qui précède, une solution des équations aux variations. En désignant par u_i, v_i des inconnues auxiliaires, l'intégrale précédente peut s'écrire

$$\sum_i \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q_i} + u_i \right) \xi_i + \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} + v_i \right) \eta_i \right] - \sum_i (u_i \xi_i + v_i \eta_i) = 0.$$

Mais on a

$$u_i \xi_i = \int (u_i \, d\xi_i + \xi_i \, du_i)$$
$$= \int \left[u_i \sum_k \left(\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial p_i \, \partial q_k}\xi_k + \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial p_i \, \partial p_k}\eta_k \right) + \xi_i \frac{du_i}{dt} \right] dt$$

et

$$v_i \eta_i = \int (v_i \, d\eta_i + \eta_i \, dv_i)$$
$$= \int \left[v_i \sum_k \left(-\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial q_i \, \partial q_k}\xi_k - \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial q_i \, \partial p_k}\eta_k + \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k}\xi_k + \frac{\partial \Delta_i}{\partial p_k}\eta_k \right) + \eta_i \frac{dv_i}{dt} \right] dt.$$

On a donc l'intégrale

$$\sum_i \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q_i} + u_i\right)\xi_i + \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} + v_i\right)\eta_i\right.$$

$$-\int \sum_i \left[u_i \sum_k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial q_k}\xi_k + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial p_k}\eta_k\right) + \xi_i \frac{du_i}{dt}\right.$$

$$\left. + v_i \sum_k \left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\, \partial p_k}\xi_k - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i\, \partial p_k}\eta_k + \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k}\xi_k + \frac{\partial \Delta_i}{\partial p_k}\eta_k\right) + \eta_i \frac{dv_i}{dt}\right] dt = 0.$$

Le coefficient de dt, sous le signe $\int$, peut s'écrire

$$\sum_i \left(\xi_i \frac{du_i}{dt} + \eta_i \frac{dv_i}{dt}\right)$$

$$+ \sum_{ik} \left(u_i \xi_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial q_k} + u_i \eta_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial p_k}\right.$$

$$\left. - v_i \xi_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i\, \partial q_k} - v_i \eta_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i\, \partial p_k} + v_i \xi_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k} + v_i \eta_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial p_k}\right),$$

ou bien, en permutant les indices i, k dans la somme double et mettant ensuite ξ_i et η_i en facteurs,

$$\sum_i \left\{ \xi_i \left[\frac{du_i}{dt} + \sum_k \left(u_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i\, \partial p_k} - v_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i\, \partial q_k} + v_k \frac{\partial \Delta_k}{\partial q_i}\right)\right]\right.$$

$$\left. + \eta_i \left[\frac{dv_i}{dt} + \sum_k \left(u_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial p_k} - v_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial q_k} + v_k \frac{\partial \Delta_k}{\partial p_i}\right)\right]\right\},$$

et l'intégrale s'écrit sous la forme

$$\sum \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q_i} + u_i\right)\xi_i + \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} + v_i\right)\eta_i\right]$$

$$-\int \sum_i \left\{ \xi_i \left[\frac{du_i}{dt} + \sum_k \left(u_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i\, \partial p_k} - v_k \frac{\partial^2 H}{\partial q_i\, \partial q_k} + v_k \frac{\partial \Delta_k}{\partial q_i}\right)\right]\right.$$

$$\left. + \eta_i \left[\frac{dv_i}{dt} + \sum_k \left(u_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial p_k} - v_k \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\, \partial q_k} + v_k \frac{\partial \Delta_k}{\partial p_i}\right)\right]\right\} dt = 0.$$

Si l'on prend pour u_i, v_i des solutions des équations différentielles linéaires

$$\frac{du_i}{dt}+\sum_k\left(u_k\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial p_k}-v_k\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial q_k}+v_k\frac{\partial \Delta_k}{\partial q_i}\right)$$
$$=-\sum_k\left[\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}+v_k\right)\left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k}-\frac{\partial \Delta_k}{\partial q_i}\right)-\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}+u_k\right)\frac{\partial \Delta_i}{\partial p_k}\right]$$
$$\frac{dv_i}{dt}+\sum_k\left(u_k\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial p_k}-v_k\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial q_k}+v_k\frac{\partial \Delta_k}{\partial p_i}\right)$$
$$=\sum_k\left(\frac{\partial p}{\partial p_k}+v_k\right)\frac{\partial \Delta_k}{\partial p_i},$$

qui s'écrivent, en simplifiant,

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{du_i}{dt}+\sum_k\left[u_k\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial p_k}-\frac{\partial \Delta_i}{\partial p_k}\right)-v_k\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial q_k}-\frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k}\right)\right]\\&\qquad=(f,\Delta_i)+\sum_k\frac{\partial p}{\partial p_k}\frac{\partial \Delta_k}{\partial q_i},\\&\frac{dv_i}{dt}+\sum_k\left(u_k\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial p_k}-v_k\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial q_k}\right)=\sum_k\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial \Delta_k}{\partial p_i},\end{aligned}\right.$$

l'intégrale se présente sous la forme (4), où l'on a

$$A_i=\frac{\partial f}{\partial q_i}+u_i,\qquad B_i=\frac{\partial f}{\partial p_i}+v_i:$$

De là résulte que, étant donnée l'intégrale $f(q, p)=$ const. des équations canoniques corrigées, si l'on peut trouver une solution des équations (5), on aura une solution des équations aux variations, à savoir

$$\xi_i=\frac{\partial f}{\partial p_i}+v_i,\qquad \eta_i=-\frac{\partial f}{\partial q_i}-u_i.$$

Pour les systèmes holonomes, tous les Δ étant nuls, les équations (5) admettent la solution évidente $u_i=v_i=0$, et l'on retrouve la solution connue des équations aux variations

$$\xi_i=\frac{\partial f}{\partial p_i},\qquad \eta_i=-\frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

Pour les systèmes non holonomes, on n'aperçoit pas, *a priori*, une solution des équations (5).

Laissant de côté la détermination d'une solution particulière des équations (5), supposons que nous connaissions deux intégrales $f = \text{const.}$ et $\varphi = \text{const.}$ des équations canoniques corrigées; une solution u_i, v_i de (5), et une solution u'_i, v'_i des équations (5) dans lesquelles f est remplacé par φ. La relation (3) donne alors une intégrale des équations canoniques corrigées.

Après quelques réductions faciles, cette intégrale peut s'écrire

$$(f, \varphi) + \sum_i (u_i v'_i - v_i u'_i) + \sum_i \left(u_i \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} - v_i \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\right) - \sum_i \left(u'_i \frac{\partial f}{\partial p_i} - v'_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\right)$$
$$+ \int \Bigg\{ \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial p_i}(\varphi, \Delta_i) - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}(f, \Delta_i)\right] + \sum_i [v_i(\varphi, \Delta_i) - v'_i(f, \Delta_i)]$$
$$+ \sum_{ik} \Bigg[\frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\left(v_i \frac{\partial \Delta_k}{\partial q_i} - u_i \frac{\partial \Delta_k}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial p_k}\left(v'_i \frac{\partial \Delta_k}{\partial q_i} - u'_i \frac{\partial \Delta_k}{\partial p_i}\right)$$
$$+ v_i v'_k \left(\frac{\partial \Delta_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \Delta_i}{\partial q_k}\right) + v_i u'_k \frac{\partial \Delta_i}{\partial p_k} - u_i v'_k \frac{\partial \Delta_k}{\partial p_i}\Bigg)\Bigg]\Bigg\} dt = \text{const.}$$

Telle est la forme dans laquelle se présente le théorème de Poisson pour les systèmes non holonomes. Si les Δ sont nuls, on peut prendre

$$u_i = v_i = u'_i = v'_i = 0,$$

et l'on retrouve bien l'intégrale $(f, \varphi) = \text{const.}$

On peut simplifier les résultats précédents en s'appuyant sur un théorème dû à M. de Donder (¹). Étant donné le système

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \tag{6}$$

dont les équations aux variations sont

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \xi_k, \tag{7}$$

si l'on connaît une intégrale $f = \text{const.}$ des équations (6), et si ξ est une solution des équations aux variations (7), les équa-

---

(¹) *Étude sur les invariants intégraux* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XV et XVI, 1901 et 1902).

tions (6) admettent la nouvelle intégrale

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \xi_k = \text{const.} \tag{8}$$

Dès lors, si nous supposons connues les deux intégrales $f = \text{const.}$ et $\varphi = \text{const.}$ des équations canoniques corrigées, et une solution u_i, v_i des équations (5), on aura la nouvelle intégrale

$$\sum_k \left[\frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k} + v_k\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k} + u_k\right)\right] = \text{const.},$$

ou bien

$$(f, \varphi) + \sum_k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} u_k - \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} v_k\right) = \text{const.},$$

ce qui donne une forme plus simple du théorème de Poisson.

On peut encore écrire la nouvelle intégrale

$$(\varphi, f) + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} u'_k - \frac{\partial f}{\partial p_k} v'_k\right) = \text{const.},$$

u', v' étant solutions des équations (5) où φ remplace f.

Remarquons enfin que, en associant à l'intégrale $f = \text{const.}$ la solution $\xi_i = \frac{\partial f}{\partial p_i} + v_i$, $\eta_i = -\frac{\partial f}{\partial q_i} + u_i$, on obtient l'intégrale

$$\sum_k \left[\frac{\partial f}{\partial q_k}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k} + v_k\right) - \frac{\partial f}{\partial p_k}\left(\frac{\partial f}{\partial q_k} + u_k\right) = \text{const.}\right.$$

ou

$$\sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} v_k - \frac{\partial f}{\partial p_k} u_k\right) = \text{const.}$$

Pour un système holonome, cette dernière intégrale est une identité.

Resterait à examiner si les nouvelles intégrales sont distinctes de celles qui servent à les former.