Bulletin de la S. M. F.

E. Goursat

Sur quelques points de la théorie des équations intégrales

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 197-204

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__197_0>

SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES;

PAR M. E. GOURSAT.

1. Le théorème capital dans la théorie moderne des équations intégrales est dû, comme l'on sait, à M. Fredholm, qui a démontré que la solution $\varphi(x)$ de l'équation

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds, \tag{1}$$

considérée comme fonction du paramètre λ, est une fonction *méromorphe* de ce paramètre. Dans le Mémoire de M. Fredholm, ce théorème apparaît comme un résultat de calcul. Il nous est aujourd'hui bien facile, grâce à l'une des ingénieuses méthodes de M. E. Schmidt, de mettre ce point en évidence presque sans aucun calcul. La démonstration qu'on va lire offre quelque analogie avec la démonstration classique, fondée sur le théorème d'addition, par laquelle on démontre que les intégrales de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2)$$

sont des fonctions méromorphes dans tout le plan.

Supposons, pour fixer les idées, le noyau $K(x, y)$ continu; on satisfait *formellement* à l'équation (1) en posant

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda)\,f(s)\,ds, \tag{2}$$

$\Gamma(x, s; \lambda)$ étant la fonction résolvante pour le noyau $K(x, y)$:

$$\Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda\, K^{(2)}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1}\, K^{(n)}(x, y) + \ldots; \tag{3}$$

$K^{(2)}(x, y)$, ..., $K^{(n)}(x, y)$, ... sont les noyaux qu'on déduit de $K(x, y)$ par des itérations successives [1]. La série (3) est certai-

---

[1] *Voir* mon Mémoire, *Recherches sur les équations intégrales linéaires* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 1908, p. 1-98).

nement convergente pourvu que le module de λ soit assez petit, et, pour ces valeurs de λ, la formule (2) donne explicitement la solution $\varphi(x)$ de l'équation (1). On voit donc que $\varphi(x)$, considérée comme fonction du paramètre λ, est *une fonction analytique de ce paramètre, régulière dans le domaine de l'origine.*

Soit maintenant R un nombre positif quelconque ; désignons par C_R le cercle de rayon R décrit de l'origine comme centre dans le plan de la variable λ. Nous nous proposons de démontrer que la fonction analytique $\varphi(x)$ précédente, considérée comme fonction de λ, est méromorphe dans ce cercle C_R.

Cela est évident si le noyau $K(x, y)$ est de la forme particulière

$$K(x, y) = X_1 Y_1 + \ldots + X_n Y_n,$$

$X_1, \ldots, X_n$ étant des fonctions de x, et $Y_1, \ldots, Y_n$ des fonctions de y, et plus généralement pour une équation intégrale de forme plus générale

$$\varphi(x) = f(x, \lambda) + \lambda \int_a^b \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(x, \lambda)\, \beta_p(s, \lambda)\, \varphi(s)\, ds, \tag{4}$$

$\alpha_p(x, \lambda)$, $\beta_p(x, \lambda)$, $f(x, \lambda)$ étant des fonctions régulières de λ dans le cercle C_R. La solution $\varphi(x)$ de l'équation précédente s'exprime en effet par le quotient de deux fonctions régulières du paramètre λ dans ce cercle C_R (1).

Pour prouver qu'il en est de même pour un noyau continu quelconque, nous emploierons la méthode de M. Schmidt (2), qui repose sur les lemmes suivants :

I. Le rayon de convergence de la série (3) est au moins égal à $\frac{1}{\sqrt{L}}$, où l'on a posé

$$L = \int_a^b \int_a^b [K(x, y)]^2\, dx\, dy;$$

on le déduit aisément des inégalités de Schwarz.

(1) E. Goursat, *Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXV, 1907, p. 162-173).

(2) E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen* (*Mathematische Annalen*, t. LXIV, p. 161-174).

II. Étant donné un noyau continu $K(x, y)$, on peut toujours trouver n couples de fonctions $\alpha_p(x)$, $\beta_p(y)$ tels qu'on ait

$$\int_a^b \int_a^b \left[K(x, y) - \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(x) \beta_p(y) \right]^2 dx\, dy < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif quelconque.

Cela étant, imaginons qu'on ait choisi n couples de fonctions $\alpha_p(x)$, $\beta_p(y)$ de façon qu'on ait

$$(5) \qquad \int_a^b \int_a^b \left[K(x, y) - \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(x) \beta_p(y) \right]^2 < \frac{1}{R^2},$$

et posons

$$\overline{K}(x, y) = K(x, y) - \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(x) \beta_p(y);$$

la fonction résolvante $\overline{\Gamma}(x, y; \lambda)$, relative au noyau auxiliaire $\overline{K}(x, y)$, est une fonction régulière du paramètre λ dans le cercle C_R, d'après le premier lemme de M. Schmidt. Or, l'équation (1) peut s'écrire

$$(6) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \overline{K}(x, s)\varphi(s)\, ds + \lambda \int_a^b \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(x) \beta_p(s) \varphi(s)\, ds,$$

ou encore

$$(7) \qquad \varphi(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b \overline{K}(x, s)\varphi(s)\, ds,$$

en posant

$$(8) \qquad f_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(x) \beta_p(s) \varphi(s)\, ds.$$

Mais, si nous supposons qu'on ait $|\lambda| < R$, on tire de l'équation (7)

$$(9) \qquad \varphi(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^b \overline{\Gamma}(x, t; \lambda) f_1(t)\, dt,$$

et, en remplaçant $f_1(x)$ par son expression (8), il vient encore

$$(10)\quad \varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b \sum_{p=1}^{n}\alpha_p(x)\,\beta_p(s)\,\varphi(s)\,ds$$
$$+\lambda\int_a^b \overline{\Gamma}(x,t;\lambda)\,f(t)\,dt$$
$$+\lambda^2\int_a^b\int_a^b \overline{\Gamma}(x,t;\lambda)\sum_{p=1}^{n}\alpha_p(t)\,\beta_p(s)\,\varphi(s)\,ds\,dt.$$

Cette dernière intégrale double peut aussi s'écrire

$$\lambda^2\int_a^b \sum_{p=1}^{n}\beta_p(s)\,\varphi(s)\,ds\int_a^b \overline{\Gamma}(x,t;\lambda)\,\alpha_p(t)\,dt$$
$$=\lambda^2\int_a^b \sum_{p=1}^{n}\gamma_p(x,\lambda)\,\beta_p(s)\,\varphi(s)\,ds,$$

$\gamma_p(x,\lambda)$ étant une fonction régulière de λ dans le cercle C_R.

L'équation (10) est donc de la forme

$$(11)\qquad \varphi(x)=F(x,\lambda)+\lambda\int_a^b \sum_{p=1}^{n} f_p(x,\lambda)\,\beta_p(s)\,\varphi(s)\,ds,$$

$F(x,\lambda)$ et $f_i(x,\lambda)$ désignant des fonctions du paramètre λ régulières dans le cercle C_R. C'est donc une équation de la forme (4), et l'on a observé que, dans ce cas particulier, la solution $\varphi(x)$ est le quotient de deux fonctions de λ holomorphes dans C_R, c'est-à-dire une fonction méromorphe dans ce cercle.

Le rayon R étant un nombre positif quelconque, il s'ensuit que $\varphi(x)$ est une fonction méromorphe de λ dans tout le plan.

2. La méthode de M. Schmidt pour la résolution de l'équation (1) consiste, comme on voit, à décomposer le noyau $K(x,y)$ en deux noyaux

$$K(x,y)=\overline{K}(x,y)+\sum_{p=1}^{n}\alpha_p(x)\,\beta_p(y),$$

le noyau $\overline{K}(x, y)$ étant tel que la fonction résolvante correspondante $\overline{\Gamma}(x, y; \lambda)$ soit une fonction holomorphe du paramètre dans un cercle dont le rayon est supérieur à $|\lambda|$. On a ensuite à résoudre successivement deux équations intégrales, pour l'une desquelles le noyau est $\overline{K}(x, y)$, tandis que le second noyau est de la forme spéciale $\sum_1^n X_i, Y_i$.

L'étude que j'ai faite des propriétés de la fonction méromorphe $\Gamma(x, y; \lambda)$ dans le Mémoire déjà cité [1] conduit à une décomposition analogue du problème, *mais non équivalente* à celle de M. Schmidt.

Soit R le module de la valeur donnée de λ dans l'équation (1) qu'il s'agit de résoudre, et soient $c_1, c_2, \ldots, c_m$ les pôles de $\Gamma(x, y; \lambda)$ dont le module est inférieur ou au plus égal à R, $h_i(x, y)$ le noyau principal relatif au pôle c_i. Posons

$$K_1(x, y) = \sum_{i=1}^{m} h_i(x, y), \qquad K_2(x, y) = K(x, y) - K_1(x, y);$$

les deux noyaux $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ sont orthogonaux, et, si l'on ajoute les solutions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ des deux équations auxiliaires

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x, s)\, \varphi(s)\, ds, \tag{12}$$

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_2(x, s)\, \varphi(s)\, ds, \tag{13}$$

la somme $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ est la solution cherchée de l'équation (1). Or le noyau $K_1(x, y)$ est de la forme spéciale $\Sigma X_i Y_i$, tandis que la fonction résolvante $\Gamma_2(x, y; \lambda)$ relative au noyau $K_2(x, y)$ est une fonction holomorphe de λ dans un cercle de rayon supérieur à R. On voit qu'avec cette méthode les deux équations auxiliaires (12) et (13) sont absolument indépendantes l'une de l'autre, ce qui n'a pas lieu avec le procédé de M. Schmidt. On peut observer aussi que rien n'empêche de comprendre, parmi

---

(1) *Annales de la Faculté de Toulouse*, 1908.

les pôles c_1, c_2, ..., c_m, quelques-uns de ceux dont le module est supérieur à R; la seule condition essentielle, c'est que dans cette suite figurent tous les pôles de $\Gamma(x, y; \lambda)$ dont le module ne dépasse pas R.

3. Les noyaux de la forme particulière $p(x)\, q(y)\, S(x, y)$, où $S(x, y)$ est une fonction symétrique de x et de y, se présentent dans plusieurs questions importantes de Physique mathématique. Lorsque le produit $p(x)q(x)$ conserve un signe constant, on a déjà démontré de différentes façons que ces noyaux jouissent des mêmes propriétés que les noyaux symétriques, c'est-à-dire que tous les pôles de $\Gamma(x, y; \lambda)$ sont réels et du premier ordre. On peut encore le démontrer en s'appuyant sur une relation presque évidente entre les fonctions fondamentales associées, qui n'a peut-être pas été remarquée. Supposons, pour fixer les idées, que $p(x)$, $q(y)$, $S(x, y)$ soient des fonctions continues, ou tout au moins bornées et intégrables, et soit λ_i un pôle de $\Gamma(x, y; \lambda)$; $\varphi_i(x)$ étant une fonction fondamentale correspondant à ce pôle, on a

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b p(x)\, q(s)\, S(x, s)\, \varphi_i(s)\, ds, \tag{14}$$

d'où l'on déduit que $\varphi_i(x)$ est le produit de $p(x)$ par une autre fonction bornée $\pi_i(x)$. En posant

$$\varphi_i(x) = p(x)\, \pi_i(x),$$

l'égalité (14) devient

$$\pi_i(x) = \lambda_i \int_a^b p(s)\, q(s)\, S(x, s)\, \pi_i(s)\, ds. \tag{15}$$

On est conduit à la même équation (15) en partant de l'équation associée

$$\psi_i(x) = \lambda_i \int_a^b p(s)\, q(x)\, S(s, x)\, \psi_i(s)\, ds, \tag{16}$$

et en posant $\psi_i(x) = q(x)\pi_i(x)$, puisque $S(x, s) = S(s, x)$.

On en conclut que, *si* $\varphi_i(x)$ *est une solution de l'équa-*

tion (14),

$$\psi_i(x) = \frac{q(x)}{p(x)} \varphi_i(x)$$

est une solution de l'équation (16), et réciproquement.

Cela posé, soient λ_1, λ_2 deux pôles distincts, $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ deux fonctions fondamentales correspondantes. D'après la propriété générale d'orthogonalité, on aura

$$\int_a^b \frac{q(x)\,\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)}{p(x)}\,dx = 0. \tag{17}$$

Supposons qu'il y ait un pôle imaginaire $\lambda_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, et soit $u(x) + v(x)\sqrt{-1}$ une fonction fondamentale correspondant à ce pôle; à la racine conjuguée $\lambda_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1}$ correspond la fonction fondamentale $u(x) - v(x)\sqrt{-1}$, et la relation (17) devient

$$\int_a^b \frac{q(x)}{p(x)}[u^2(x) + v^2(x)]\,dx = 0. \tag{18}$$

Il est clair qu'une telle relation est impossible si le produit $p(x)q(x)$ conserve le même signe dans l'intervalle (a, b).

En restant dans cette hypothèse, on pourra démontrer ensuite que tous les pôles sont du premier ordre, en montrant qu'à une racine d'ordre n de $D(\lambda)$ correspondent n fonctions fondamentales distinctes. Il suffira, par exemple, de répéter la démonstration que j'ai donnée dans le cas d'un noyau symétrique ([1]), en prenant pour la fonction $\pi_1(x)$ une fonction de la forme

$$\frac{C q(x)\,\varphi_1(x)}{p(x)}.$$

Remarque. — La relation précédente entre les fonctions fondamentales associées s'appliquerait aussi aux noyaux de la forme

$$p(x)\,q(y)\,S'(x, y),$$

$S'(x, y)$ étant tel qu'on ait

$$S'(y, x) = -S'(x, y).$$

([1]) *Annales de la Faculté de Toulouse,* 1908, p. 50.

D'ailleurs, le noyau qu'on en déduit par itération

$$\int_a^b p(x)\,q(s)\,S'(x, s)\,p(s)\,q(y)\,S'(s, y)\,ds$$

est de la forme

$$p(x)\,q(y)\,S_1(x, y),$$

S_1 étant symétrique.