A. MALUSKI

Sur la continuité des racines d'une équation algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 32-37

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__32_0>

SUR LA CONTINUITÉ DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE;

PAR M. ARTHUR MALUSKI.

Tout revient à démontrer le théorème suivant :

Soit l'équation algébrique

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = 0;$$

quel que soit le nombre positif A, *on peut lui faire correspondre un nombre positif* ε *tel que, si les rapports*

$$\frac{a_m}{a_{m-p}}, \quad \frac{a_{m-1}}{a_{m-p}}, \quad \ldots, \quad \frac{a_{m-p+1}}{a_{m-p}}$$

sont inférieurs à ε *en valeur absolue, l'équation proposée admet p racines dont les valeurs absolues sont supérieures à* A.

J'appelle ici *valeur absolue* du nombre $z = x + iy$ le nombre $+\sqrt{x^2+y^2}$ et je poserai, pour abréger,

$$z' = +\sqrt{x^2+y^2}.$$

Si toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont, en valeur absolue, inférieures au nombre positif α_1, la valeur absolue de la somme des produits p à p de ces racines est moindre que $C_m^p \alpha_1^p$, en sorte qu'on a

$$\frac{a'_{m-p}}{a'_m} < C_m^p \alpha_1^p.$$

Par conséquent, dès l'instant où l'on a

$$\frac{a'_m}{a'_{m-p}} < \frac{1}{C_m^p \alpha_1^p},$$

l'équation $f(x) = 0$ admet certainement une racine x_1 telle que $x'_1 > \alpha_1$.

Cette conclusion subsiste même si

$$\frac{a'_m}{a'_{m-p}} = \frac{1}{C_m^p \alpha_1^p},$$

à condition que $\pm \alpha_1$ ne soit pas racine de $f(x) = 0$.

1. Posons

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{C_m^p \alpha_1^p}$$

et supposons que tous les rapports

$$\frac{a'_m}{a'_{m-p}}, \quad \frac{a'_{m-1}}{a'_{m-p}}, \quad \ldots, \quad \frac{a'_{m-p+1}}{a'_{m-p}}$$

soient inférieurs à ε_1.

Divisons le polynome $f(x)$ par $1 - \frac{x}{x_1}$; désignons le quotient par $f_1(x)$; $f_1(x)$ est un polynome entier en x de degré $m-1$, que nous pouvons représenter par

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1} x^{m-1}.$$

Un calcul facile donne

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0,\\
b_1 &= a_1 + \frac{a_0}{x_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
b_{m-p} &= a_{m-p} + \frac{a_{m-p-1}}{x_1} + \ldots + \frac{a_0}{x_1^{m-p}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
b_{m-1} &= a_{m-1} + \frac{a_{m-2}}{x_1} + \ldots + \frac{a_{m-p+1}}{x_1^{p-1}} + \frac{a_{m-p}}{x_1^p} + \ldots + \frac{a_0}{x_1^{m-1}}.
\end{aligned}$$

En tenant compte de l'expression de b_{m-p}, on voit immédiatement qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}
b_{m-p+1} &= a_{m-p+1} + \frac{1}{x_1} b_{m-p},\\
b_{m-p+2} &= a_{m-p+2} + \frac{1}{x_1} a_{m-p+1} + \frac{1}{x_1^2} b_{m-p},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
b_{m-1} &= a_{m-1} + \frac{1}{x_1} a_{m-2} + \ldots + \frac{1}{x_1^{p-2}} a_{m-p+1} + \frac{1}{x_1^{p-1}} b_{m-p}.
\end{aligned}$$

Considérons le rapport $\frac{b'_{m-1}}{b'_{m-p}}$ et cherchons-en une limite supérieure. Désignons par N un nombre au moins égal à la plus grande valeur absolue des différents rapports

$$\frac{a_{m-p-1}}{a_{m-p}}, \quad \ldots, \quad \frac{a_0}{a_{m-p}}.$$

Si l'on a pu choisir α_1 tel que

$$\alpha_1 > N + 2,$$

et nous verrons dans un instant que c'est possible, on voit facilement qu'on a

$$\frac{b'_{m-1}}{b'_{m-p}} < \frac{\varepsilon_1 \alpha_1}{\alpha_1 - N - 1} + \frac{1}{\alpha_1^{p-1}}.$$

En effet, on a

$$\frac{b_{m-1}}{b_{m-p}} = \frac{a_{m-1} + \frac{1}{x_1} a_{m-2} + \ldots + \frac{1}{x_1^{p-2}} a_{m-p+1}}{a_{m-p} + \frac{1}{x_1} a_{m-p-1} + \ldots + \frac{1}{x_1^{m-p}} a_0} + \frac{1}{x_1^{p-1}}$$

ou encore

$$\frac{b_{m-1}}{b_{m-p}} = \frac{\frac{a_{m-1}}{a_{m-p}} + \frac{1}{x_1} \frac{a_{m-2}}{a_{m-p}} + \ldots + \frac{1}{x_1^{p-2}} \frac{a_{m-p+1}}{a_{m-p}}}{1 + \frac{1}{x_1} \frac{a_{m-p-1}}{a_{m-}} + \ldots + \frac{1}{x_1^{m-p}} \frac{a_0}{a_{m-p}}} + \frac{1}{x_2^{p-1}}.$$

On en déduit

$$\frac{}{b'_{m-p}} < \frac{\varepsilon_1 \left(1 + \frac{1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_1^{p-2}}\right)}{1 - N\left(\frac{1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_1^{m-p}}\right)} + \frac{1}{\alpha_1^{p-1}}$$

et, *a fortiori*, puisque $\alpha_1 > 1$,

$$\frac{b'_{m-1}}{b'_{m-p}} < \frac{\varepsilon_1 \alpha_1}{\alpha_1 - N - 1} + \frac{1}{\alpha_1^{p-1}}.$$

On a, de la même manière,

$$\frac{b'_{m-2}}{b'_{m-p}} < \frac{\varepsilon_1 \alpha_1}{\alpha_1 - N - 1} + \frac{1}{\alpha_1^{p-2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{b'_{m-p+1}}{b'_{m-p}} < \frac{\varepsilon_1 \alpha_1}{\alpha_1 - N - 1} + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Tous les nombres qui constituent les seconds membres des inégalités précédentes sont inférieurs au dernier d'entre eux qui, lui-même, est manifestement inférieur à $\frac{2}{\alpha_1}$, car, si l'on remplace ε_1 par sa valeur et si l'on remarque que le nombre $\alpha_1 - \mathrm{N} - 1$ est au moins égal à 1 en vertu des hypothèses, on a sûrement

$$\frac{\varepsilon_1 \alpha_1}{\alpha_1 - \mathrm{N} - 1} < \frac{1}{\alpha_1},$$

pourvu que $p > 1$. Or, ce calcul est sans objet lorsque $p = 1$.

2. Déterminons maintenant le nombre positif α_2 par la condition

$$\frac{2}{\alpha_1} = \frac{1}{C_{m-1}^{p-1} \alpha_2^{p-1}}$$

et posons

$$\frac{2}{\alpha_1} = \varepsilon_2.$$

On voit, comme précédemment, que tous les rapports

$$\frac{b'_{m-1}}{b'_{m-p}}, \quad \frac{b'_{m-2}}{b'_{m-p}}, \quad \dots, \quad \frac{b'_{m-p+1}}{b'_{m-p}}$$

sont tous inférieurs à ε_2.

Par conséquent, l'équation $f_1(x) = 0$ admet au moins une racine x_2 telle que

$$x'_2 > \alpha_2.$$

D'un autre côté, on établit par un calcul analogue au précédent que les rapports

$$\frac{b'_0}{b'_{m-p}}, \quad \frac{b'_1}{b'_{m-p}}, \quad \dots, \quad \frac{b'_{m-p-1}}{b'_{m-p}}$$

sont tous inférieurs à $\frac{\mathrm{N} x'_1}{x'_1 - \mathrm{N} - 1}$ et, par suite, à $2\mathrm{N}$, pourvu qu'on suppose

$$\alpha_1 > 2(\mathrm{N} + 1),$$

inégalité non contradictoire avec la précédente limite de α_1.

Divisons à présent le polynome $f_1(x)$ par $1 - \frac{x}{x_2}$ et désignons le quotient par $f_2(x)$; on voit, en raisonnant comme précédemment, que, si α_3 désigne un nombre positif tel que

$$\frac{2}{\alpha_2} = \frac{1}{C_{m-2}^{p-2}\alpha_3^{p-2}},$$

et si l'on pose

$$\varepsilon_3 = \frac{2}{\alpha_2},$$

les valeurs absolues des rapports des $p - 2$ coefficients des plus hautes puissances de x du polynome $f_2(x)$ à celui de x^{m-p} sont inférieures à ε_3. Par conséquent, une racine au moins de $f_2(x) = 0$, soit x_3, satisfait à la condition

$$x'_3 > \alpha_3.$$

Si, en outre, on a pu prendre

$$\alpha_2 > 2(2N + 1)$$

ou même, ce qui est plus simple,

$$\alpha_2 > 4(N + 1),$$

les valeurs absolues des rapports des $m - p$ premiers coefficients de $f_2(x)$ au suivant sont inférieures à $4N$.

3. Continuons ainsi jusqu'à ce que nous arrivions au polynome $f_p(x)$.

Nous avons eu à écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha_{p-1} &= 2\,C_{m-p+1}^{1}\,\alpha_p,\\
\alpha_{p-2} &= 2\,C_{m-p+2}^{2}\,(\alpha_{p-1})_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\alpha_1 &= 2\,C_{m-1}^{p-1}\,(\alpha_2)^{p-1}.
\end{aligned}$$

En même temps, nous avons supposé qu'on pouvait prendre

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &> 2\ \ (N + 1),\\
\alpha_2 &> 2^2\,(N + 1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\alpha_p &> 2^p(N + 1).
\end{aligned}$$

D'après les égalités précédentes, toutes ces inégalités sont satisfaites si l'on prend seulement

$$\alpha_p > 2^p(\mathrm{N} + 1).$$

On prendra ensuite

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\mathrm{C}_m^p \alpha_1^p}.$$

Alors, si α_p vérifiant la condition précédente, on a de plus

$$\alpha_p > \mathrm{A},$$

A étant un nombre positif donné à l'avance aussi grand qu'on veut, on voit que les p nombres $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$ sont tous supérieurs à A.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc p racines $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dont les valeurs absolues sont supérieures à A.

Enfin, les valeurs absolues des rapports des $m - p$ premiers coefficients de $f_p(x)$ au dernier sont inférieures à $2^p \times \mathrm{N}$, en sorte que, d'après un théorème connu, toutes les racines de l'équation $f_p(x) = 0$ sont, en valeur absolue, inférieures à $2^p \times \mathrm{N} + 1$.

Le théorème est complètement démontré.