BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RÉMY

Sur le nombre des intégrales doubles de seconde espèce de certaines surfaces algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 3-11
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__3_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LE NOMBRE DES INTÉGRALES DOUBLES DE SECONDE ESPÈCE DE CERTAINES SURFACES ALGÉBRIQUES;

Par M. L. Remy.

D'après un théorème fondamental de M. Picard ([1]), toute surface algébrique $F(X, Y, Z) = 0$ possède un nombre limité ρ_0 d'intégrales doubles de seconde espèce distinctes, c'est-à-dire telles qu'il n'existe aucune combinaison linéaire de ces intégrales de la forme

$$\int\int\left(\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}\right) dX\, dY,$$

U et V étant des fonctions rationnelles de X, Y, Z.

La présente Note a pour objet de déterminer la valeur de cet invariant ρ_0 pour les surfaces algébriques S_n *liées à une courbe hyperelliptique* C_n *de genre* n, *de telle sorte qu'à tout couple de points de* C_n *réponde* UN *point de* S_n *et qu'inversement à tout point de* S_n *répondent* DEUX *couples de* C_n, *les points du premier couple étant conjugués hyperelliptiques de ceux du second* ([2]). Cette classe de surfaces algébriques comprend comme

([1]) *Traité des fonctions algébriques de deux variables,* t. II, p. 186 et 409, et *Annales de l'École Normale,* 1908.

([2]) On peut établir que toute surface S_n dont les points admettent une correspondance (1, 2) avec les couples de points de la courbe C_n est nécessairement de ce type.

cas particulier (pour $n = 2$) les surfaces du type de Kummer.

Pour déterminer l'invariant ρ_0, nous aurons recours à la formule suivante, due également à M. Picard :

$$\rho_0 = \mathrm{N} + \sum(\mu_i - 1) - 4p - (m - 1) + 2r - (\rho - 1),$$

où N désigne la classe et m le degré de la surface, p le genre d'une section plane arbitraire, r le nombre des intégrales de différentielles totales de seconde espèce de la surface, et où la somme $\sum(\mu_i - 1)$ est étendue à tous les points singuliers isolés, d'ordres μ_i de multiplicité. Enfin, le nombre ρ est le nombre maximum des courbes algébriques irréductibles $C_1, \ldots, C_\rho$ qu'on peut tracer sur la surface, sans qu'il existe d'intégrale de différentielle totale de troisième espèce ayant seulement la totalité ou une partie des courbes $C_1, \ldots, C_\rho$ comme courbes logarithmiques.

I.

La détermination de l'invariant ρ_0 suppose la connaissance de l'invariant relatif ρ. Nous avons établi [1] que ρ est égal à *deux* pour les surfaces dont les points admettent une correspondance univoque, sans courbe exceptionnelle, avec les couples de points d'une courbe algébrique non unicursale et non singulière ; mais ce résultat n'est pas immédiatement applicable au cas actuel, la correspondance entre la surface S_n et la courbe C_n n'étant pas *univoque*.

Envisageons une surface S_n sans courbe exceptionnelle (c'est-à-dire répondant à un seul couple de C_n), et supposons de plus, par analogie avec la théorie des surfaces hyperelliptiques, que tous les couples de C_n formés de deux points conjugués l'un de l'autre définissent un même point de la surface. D'autre part, il est permis de supposer que la courbe C_n a été ramenée, par une transformation birationnelle, à une courbe plane $f(x, y) = 0$, de degré $(n + 2)$, avec un point multiple d'ordre n.

Toute courbe algébrique Γ de la surface S_n définit une *correspondance algébrique* entre les points (x, y) et (x', y') de la

---

(1) *Comptes rendus*, 2 novembre 1908.

courbe C_n. Or, on doit à Hurwitz [1] un théorème relatif à ces correspondances, qui peut être énoncé sous la forme suivante : *Étant donnée une correspondance quelconque entre les points* (x, y) *et* (x', y') *d'une courbe algébrique* NON SINGULIÈRE [2], *on peut former une fonction rationnelle* $P(x, y;\, x', y')$ *n'ayant comme lignes de zéros et d'infinis, en dehors de la correspondance considérée, que la correspondance* $x = x'$, $y = y'$, *ainsi que les correspondances associant respectivement à un point variable certains points fixes* $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$.

Désignons par (ξ, η) le conjugué hyperelliptique du point (x, y) et par (ξ', η') celui de (x', y'), et formons le produit

$$\Pi = P(x, y;\, x', y')\, P(x', y';\, x, y)\, P(\xi, \eta;\, \xi', \eta')\, P(\xi', \eta';\, \xi, \eta).$$

Cette expression est une fonction rationnelle symétrique de (x, y) et (x', y') qui reste inaltérée par le changement simultané de (x, y) en (ξ, η) et de (x', y') en (ξ', η') : c'est, par conséquent, une fonction rationnelle des coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface. Elle admet, d'ailleurs, pour ligne de zéros et d'infinis :

1° La courbe considérée Γ;

2° La courbe J définie par les couples de C_n formés de deux points confondus ;

3° Enfin, un certain nombre de courbes L_i correspondant aux couples formés d'un point variable et d'un point fixe (x_i, y_i) ou de son conjugué (ξ_i, η_i).

Formons, d'autre part, la fonction

$$H = \left[\frac{t - t'}{(t - t_0)(t' - t_0)}\right]^2,$$

en choisissant le point multiple de C_n pour origine des coordonnées et en posant

$$\frac{y}{x} = t, \qquad \frac{y'}{x'} = t';$$

cette fonction s'annule lorsque les deux points (x, y) et (x', y') sont ou bien confondus, ou bien conjugués l'un de l'autre, et elle

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. XXVIII, p. 561.

(2) C'est-à-dire telle qu'il n'existe entre les périodes de ses intégrales abéliennes de première espèce aucune relation *singulière* à coefficients entiers.

devient infinie lorsque (x, y), ou (x', y'), coïncide avec l'un des deux points d'intersection de la courbe avec la sécante

$$y - t_0 x = 0.$$

Or la correspondance qui associe à un point de C_n le point conjugué définit sur la surface S_n non pas une courbe, mais un point; dès lors la fonction rationnelle H n'admet, pour lignes de zéros et d'infinis sur la surface, que les deux courbes J et L_0.

Introduisons enfin la fonction rationnelle

$$S_i = \frac{(t - t_0)(t' - t_0)}{(t - t_i)(t' - t_i)},$$

laquelle s'annule le long de la courbe L_0 et devient infinie le long de la courbe L_i.

Ceci posé, il est possible, en multipliant la fonction Π définie plus haut par un produit convenablement choisi des fonctions H et S_i, de former une fonction rationnelle des coordonnées d'un point de la surface $R(X, Y, Z)$ qui n'admette, comme lignes de zéros ou d'infinis, que les deux courbes Γ et L_0. Soient, dès lors, Γ_1 et Γ_2 deux courbes algébriques quelconques de la surface et R_1, R_2 les fonctions rationnelles correspondantes, lesquelles sont infinies d'ordres n_1 et n_2 le long de la courbe L_0; l'expression

$$\operatorname{Log} \frac{(R_1)^{n_2}}{(R_2)^{n_1}}$$

est une intégrale de différentielle totale de troisième espèce de la surface ne possédant pas d'autre courbe logarithmique que les courbes Γ_1 et Γ_2.

De là cette conclusion : *L'invariant relatif* ρ *est égal à* UN *pour les surfaces algébriques considérées* S_n, *dans le cas où elles ne dérivent pas d'une courbe* C_n SINGULIÈRE.

II.

Proposons-nous en second lieu de définir géométriquement une surface particulière de la classe considérée.

A cet effet considérons, dans le plan $t = 0$, deux polygones de $(n + 1)$ côtés chacun, circonscrits à une même conique

$f_2(x, y, z) = 0$ et désignons par $u_0 = 0, \ldots, u_n = 0, v_0 = 0, \ldots, v_n = 0$ les équations de leurs côtés. D'après un théorème de Géométrie élémentaire, on peut tracer, d'une part, une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre $f_n(x, y, z) = 0$ passant par les $n(n+1)$ sommets des deux polygones complets, et, d'autre part, une courbe du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre $f_{n+1}(x, y, z) = 0$ passant par les $n(n+1)$ sommets et par les $(2n+2)$ points de contact des côtés avec la conique; il existe, d'ailleurs, une identité de la forme

$$\text{(E)} \qquad (f_{n+1})^2 - f_2(f_n)^2 = (u_0 \ldots u_n)(v_0 \ldots v_n).$$

Ceci posé, nous envisagerons la surface définie par l'équation

$$t^2 f_n(x, y, z) + 2t f_{n+1}(x, y, z) + f_2(x, y, z) f_n(x, y, z) = 0,$$

laquelle est du $(n+2)^{\text{ième}}$ ordre et possède un point multiple d'ordre n. Une sécante issue du point multiple O rencontre la surface en deux points variables; si l'on projette la surface à partir de O sur le plan $t = 0$, à chaque point m de ce plan correspondent deux points m_1, m_2 de la surface et ces deux points coïncident lorsque m se trouve sur le contour apparent de la surface, constitué par les $(2n+2)$ côtés des polygones en vertu de l'identité (E).

Si donc l'on représente le point m par les deux paramètres λ, λ' des tangentes qu'on peut mener de ce point à la conique

$$f_2(x, y, z) = 0,$$

et si l'on désigne par $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ les paramètres correspondant respectivement aux côtés des deux polygones, il résulte des considérations précédentes que les coordonnées d'un point de la surface sont des fonctions rationnelles des trois quantités

$$\lambda, \quad \lambda', \quad \sqrt{(\lambda - a_0)\ldots(\lambda - b_n)}\sqrt{(\lambda' - a_0)\ldots(\lambda' - b_n)}.$$

En d'autres termes, si l'on considère la courbe hyperelliptique de genre n,

$$(\mathrm{C}_n) \qquad \rho^2 = (\lambda - a_0)\ldots(\lambda - a_n)(\lambda - b_0)\ldots(\lambda - b_n),$$

à tout couple de points de cette courbe répond un point de la surface, et à tout point de la surface répondent deux couples conjugués

$$(\lambda, \rho), \quad (\lambda', \rho') \qquad \text{et} \qquad (\lambda, -\rho), \quad (\lambda', -\rho').$$

Il est aisé, d'ailleurs, d'expliciter les expressions des coordonnées d'un point de la surface en fonction de (λ, ρ), (λ', ρ') : si l'on choisit pour plans coordonnés $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ les plans qui projettent trois côtés a_1, a_2, a_3 d'un des polygones et si l'on pose

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= (\lambda - a_0)\ldots(\lambda - a_n), \\ B(\lambda) &= (\lambda - b_0)\ldots(\lambda - b_n), \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} x &= (\lambda - a_1)(\lambda' - a_1), \\ y &= (\lambda - a_2)(\lambda' - a_2), \\ z &= (\lambda - a_3)(\lambda' - a_3), \\ t &= \frac{[A(\lambda)B(\lambda') + B(\lambda)A(\lambda') + 2\rho\rho'](\lambda' - \lambda)}{A(\lambda)B(\lambda') - B(\lambda)A(\lambda')}. \end{aligned}$$

III.

L'application de la formule fondamentale de M. Picard à la surface particulière

$$(S_n) \quad t_2 f_n(x, y, z) + 2t f_{n+1}(x, y, z) + f_2(x, y, z) f_n(x, y, z) = 0$$

ne présente aucune difficulté.

La surface n'a pas de ligne multiple, mais elle possède, outre le point singulier d'ordre n, des points doubles isolés, ainsi qu'on le reconnaît par la considération des points doubles du contour apparent; aux points d'intersection des côtés du premier polygone avec ceux du second répondent $(n+1)^2$ points doubles de la surface, tandis que les $n(n+1)$ sommets des deux polygones complets sont projetés du point O suivant des droites D qui appartiennent à la surface. Dès lors

$$\sum(\mu_i - 1) = (n-1) + (n+1)^2.$$

On trouve immédiatement

$$\begin{aligned} m &= n + 2, \\ N &= 4n^2, \\ p &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, la surface ne possédant pas d'intégrale de différentielle totale de première espèce, on en conclut que

$$r = 0.$$

La valeur du nombre ρ se déduit aisément des considérations du paragraphe II. Envisageons, en même temps que la surface particulière S_n, une surface S'_n du type défini au paragraphe II, sans courbe exceptionnelle; les deux surfaces S_n et S'_n admettant une correspondance birationnelle, leurs invariants relatifs ρ et ρ' sont liés par la relation [1]

$$\rho + F = \rho' + F', \tag{1}$$

F et F' désignant, pour chacune des deux surfaces, le nombre des points fondamentaux qui correspondent dans la transformation birationnelle à une courbe exceptionnelle de l'autre surface.

Au cas actuel, $F = 1$, car le point multiple $x = y = z = 0$ de la surface S_n correspond à la courbe de la surface S'_n définie par l'équation

$$A(\lambda)\,B(\lambda') + B(\lambda)\,A(\lambda') - 2\rho\rho' = 0,$$

ainsi qu'il résulte des expressions des coordonnées d'un point de la surface en fonction de (λ, ρ), (λ', ρ').

Inversement, à chacune des $n(n+1)$ droites D de la surface S_n répond un seul point de la surface S'_n, défini par un couple de C_n du type

$$(\lambda = a_i,\ \rho = 0), \qquad (\lambda' = a_j,\ \rho' = 0),$$

ou encore

$$(\lambda = b_i,\ \rho = 0), \qquad (\lambda' = b_j,\ \rho' = 0) \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n).$$

D'autre part, les couples de points conjugués de la courbe C_n pour lesquels on a

$$\lambda = \lambda' \qquad \text{et} \qquad \rho = -\rho'$$

définissent une courbe de S_n, à savoir la conique

$$t = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0,$$

[1] *Voir* PICARD, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, t. II, p. 412.

tandis qu'ils définissent, par hypothèse, un point unique de la surface S'_n. Par suite, le nombre F' est égal à $[n(n+1)+1]$.

Dès lors, on déduit de la relation (1) que

$$\rho = n(n+1)+1.$$

Si l'on porte les valeurs précédentes dans la formule de M. Picard,

$$\rho_0 = N + \sum(\mu_i - 1) - 4p - (m-1) + 2r - (\rho - 1),$$

on trouve, pour la surface considérée,

$$\rho_0 = 2n^2 - n - 1.$$

Nous parvenons donc au résultat suivant :

Les surfaces algébriques dont les points admettent une correspondance (1, 2) *avec les couples de points d'une courbe hyperelliptique de genre n, supposée non singulière, possèdent* $(2n^2 - n - 1)$ *intégrales doubles distinctes de seconde espèce.*

On peut prévoir, *a priori,* la forme de ces intégrales. Envisageons les $2n$ intégrales abéliennes de seconde espèce de la courbe hyperelliptique C_n, lesquelles peuvent être ramenées à la forme

$$\int \frac{z^q\,dz}{\sqrt{P(z)}} \qquad (q = 0, 1, \ldots, 2n-1),$$

$P(z)$ étant un polynome de degré $(2n+1)$, et formons les combinaisons

$$\int\int \frac{z^q z'^r - z^r z'^q}{\sqrt{P(z)}\sqrt{P(z')}}\,dz\,dz' \qquad (q, r = 0, 1, \ldots, 2n-1).$$

Ces expressions présentent le caractère d'une intégrale de seconde espèce ; d'ailleurs, elles restent invariables lorsqu'on y remplace respectivement $[z, \sqrt{P(z)}]$, $[z', \sqrt{P(z')}]$ par $[z, -\sqrt{P(z)}]$, $[z', -\sqrt{P(z')}]$; dès lors, ce sont des intégrales doubles de la surface S_n. Elles sont au nombre de $n(2n-1)$, mais elles se ramènent à $(2n^2 - n - 1)$ intégrales distinctes, en vertu d'une identité de Weierstrass fondamentale dans la théorie des intégrales hyperelliptiques

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\sqrt{P(z)}}{(z'-z)\sqrt{P(z')}}\right]-\frac{\partial}{\partial z'}\left[\frac{\sqrt{P(z')}}{(z-z')\sqrt{P(z)}}\right]=\frac{U(z,z')}{\sqrt{P(z)P(z')}},$$

U étant un polynome en z, z'.

Toutefois, cette méthode algébrique ne précise pas dans quel cas les intégrales sont réductibles à un nombre moindre, et c'est par une voie toute différente que nous avons reconnu que le cas d'exception est celui où il existe entre les périodes des intégrales abéliennes de la courbe C_n des relations singulières à coefficients entiers.