BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur la définition de l'aire d'une surface courbe

Bulletin de la S. M. F., tome 38 (1910), p. 139-144
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1910__38__139_0>

SUR LA DÉFINITION DE L'AIRE D'UNE SURFACE COURBE;

PAR M. E. GOURSAT.

1. On a proposé plusieurs définitions de l'aire d'une surface courbe. Celle que j'ai adoptée dans mon *Cours d'Analyse* suppose implicitement que la condition suivante est remplie : on peut décomposer la portion de surface considérée Σ en un nombre fini de portions $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, telles que si l'on projette l'une de ces portions σ_i sur le plan tangent en un point quelconque m_i de σ_i, cette projection ne se recouvre pas partiellement elle-même, de telle façon que la projection du contour de σ_i ne présente aucun point double.

En d'autres termes, toute droite joignant deux points quelconques de la portion σ_i n'est jamais parallèle à la normale en un autre point de la même portion de surface. Il est clair que cette condition est satisfaite pour les surfaces que l'on considère habituellement, mais on peut aussi démontrer que cette propriété est une conséquence des hypothèses qu'on fait dans la théorie classique des surfaces.

On suppose les coordonnées rectangulaires (x, y, z) d'un point M de Σ exprimées en fonction de deux paramètres variables (u, v)

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v), \tag{1}$$

les fonctions f, φ, ψ étant régulières, c'est-à-dire continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, dans une région bornée R du plan (u, v) qui correspond point par point à la surface Σ. Nous supposons de plus que les trois jacobiens

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

ne sont jamais nuls à la fois pour un point (u, v) de cette région. Soit C la courbe du plan (u, v) qui limite la région R; à cette courbe C correspond la courbe Γ qui limite Σ. Pour éviter toute difficulté relative à cette frontière, nous admettrons que les conditions précédentes sont remplies dans une région R′ du plan (u, v), un peu plus grande que R, limitée par un nouveau contour C′, qui renferme le contour C à son intérieur; cela revient à prolonger un peu la surface Σ au delà de la courbe Γ, ce qui peut évidemment se faire d'une infinité de manières. Nous appellerons Σ′ la surface ainsi prolongée.

Soit m un point quelconque de Σ, correspondant à un point (u_0, v_0) de la région R. Imaginons qu'on rapporte la surface à un nouveau système d'axes de coordonnées rectangulaires, l'origine étant au point m et l'axe mZ étant la normale en ce point. Les formules (1) sont remplacées par les suivantes

$$(2) \qquad X = F(u, v), \qquad Y = \Phi(u, v), \qquad Z = \Psi(u, v),$$

les fonctions F, Φ, Ψ étant aussi régulières dans R′. Dans ce nouveau système d'axes, le plan tangent à l'origine est le plan $Z = 0$, et par suite les deux jacobiens $\frac{D(X, Z)}{D(u, v)}$, $\frac{D(Y, Z)}{D(u, v)}$ sont nuls pour $u = u_0$, $v = v_0$. Le jacobien $\frac{D(X, Y)}{D(u, v)}$ n'est donc pas nul pour ce système de valeurs. Il suit de là, d'après la théorie des fonctions implicites, que les deux équations

$$X = F(u, v), \qquad Y = \Phi(u, v)$$

admettent en (u, v) un système de solutions et un seul tendant vers u_0 et v_0 respectivement lorsque X et Y tendent vers zéro; ces fonctions $u = \pi(X, Y)$, $v = \pi_1(X, Y)$ sont régulières dans le domaine δ défini par la condition

$$X^2 + Y^2 < \rho^2,$$

ρ étant un nombre positif convenablement déterminé.

La portion de Σ, ou de Σ′, voisine du point m, qui se projette sur le plan tangent en m à l'intérieur du cercle de rayon ρ, décrit du point m pour centre, est représentée par une équation de la forme

$$Z = \mathcal{F}(X, Y),$$

la fonction $\mathcal{F}$ étant régulière dans ce cercle.

A chaque point m de Σ correspond ainsi un nombre positif ρ; il nous suffira de démontrer que *la borne inférieure de* ρ *est un nombre positif* ρ_0, lorsque le point m décrit la surface Σ. La propriété admise plus haut pour Σ s'en déduit immédiatement; il suffira, en effet, de décomposer Σ en portions assez petites pour que la distance de deux points quelconques d'une même portion soit inférieure à ρ_0.

2. Nous n'avons pour cela qu'à reprendre la démonstration classique du théorème d'existence des fonctions implicites (*Cours d'Analyse*, t. I, 2e édition, p. 94), en précisant l'énoncé dans le cas particulier considéré ici. Prenons d'abord un système de la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} u - u_0 = x + g(u, v), \\ v - v_0 = y + h(u, v), \end{cases}$$

les fonctions $g(u, v)$, $h(u, v)$ étant nulles, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, pour $u = u_0$, $v = v_0$, et régulières dans le voisinage. Choisissons un nombre positif c tel que l'on ait

$$|g'_u| < \mathrm{K}, \qquad |g'_v| < \mathrm{K}, \qquad |h'_u| < \mathrm{K}, \qquad |h'_v| < \mathrm{K},$$

pourvu que $|u - u_0|$ et $|v - v_0|$ soient inférieurs à c, K étant un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}$. D'après la démonstration du théorème d'existence, les équations (3) admettent un système de solutions et un seul tendant vers u_0 et v_0 respectivement, pourvu que $|x|$ et $|y|$ soient inférieurs à $c(1 - 2\mathrm{K})$. Si l'on suppose par exemple qu'on ait pris $\mathrm{K} = \frac{1}{3}$, les fonctions u et v définies par les équations (3) et qui se réduisent à u_0 et v_0 pour $x = y = 0$, sont régulières tant que $|x|$ et $|y|$ restent plus petits que $\frac{c}{3}$, et par conséquent dans le domaine δ défini par la condition

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{c}{3}.$$

Revenons aux formules (2); elles peuvent s'écrire

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = \mathrm{F}(u, v), \\ \mathrm{Y} = \alpha'(x - x_0) + \beta'(y - y_0) + \gamma'(z - z_0) = \Phi(u, v), \\ \mathrm{Z} = \alpha''(x - x_0) + \beta''(y - y_0) + \gamma''(z - z_0) = \Psi(u, v), \end{cases}$$

x_0, y_0, z_0 étant les coordonnées du point m par rapport aux anciens axes, et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, les neufs cosinus directeurs. On en déduit, par un calcul facile, en supposant que les deux trièdres ont la même disposition,

$$\frac{D(X, Y)}{D(u, v)} = \alpha'' \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + \beta'' \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + \gamma'' \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Les six dérivées partielles des fonctions f, φ, ψ étant continues dans le domaine R', à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un autre nombre positif ρ, tel que pour deux points quelconques (u, v), (u', v') du domaine R' satisfaisant aux deux conditions

$$|u - u'| \leqq \rho, \qquad |v - v'| \leqq \rho,$$

on ait aussi

$$|f'_u(u, v) - f'_u(u', v')| < \varepsilon$$

et cinq inégalités analogues, que l'on obtiendrait en remplaçant $f'_u(u, v)$ par les autres dérivées. En outre, les valeurs absolues de ces six dérivées ont une borne supérieure $\mathfrak{M}$ dans R', et enfin l'expression

$$EG - F^2 = \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2$$

a pour borne inférieure un nombre *positif* μ^2. Les deux premières équations (4) peuvent s'écrire en posant

$$A = F'_u(u_0, v_0), \qquad B = F'_v(u_0, v_0), \qquad C = \Phi'_u(u_0, v_0), \qquad D = \Phi'_v(u_0, v_0),$$

$$A(u - u_0) + B(v - v_0) = X - F(u, v) + A(u - u_0) + B(v - v_0),$$

$$C(u - u_0) + D(v - v_0) = Y - \Phi(u, v) + C(u - u_0) + D(v - v_0),$$

ou encore

$$(5) \qquad \begin{cases} u - u_0 = \dfrac{DX - BY}{AD - BC} + \mathcal{F}(u, v), \\[2ex] v - v_0 = \dfrac{AY - CX}{AD - BC} + \mathcal{G}(u, v), \end{cases}$$

en posant

$$\mathcal{F}(u, v) = \frac{D[A(u - u_0) + B(v - v_0) - F(u, v)] - B[C(u - u_0) + D(v - v_0) - \Phi(u, v)]}{AD - BC},$$

$$\mathcal{G}(u, v) = \frac{A[C(u - u_0) + D(v - v_0) - \Phi(u, v)] - C[A(u - u_0) + B(v - v_0) - F(u, v)]}{AD - BC}.$$

Les deux fonctions $\mathcal{F}(u, v)$ et $\mathcal{G}(u, v)$ sont nulles, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre pour $u=u_0$, $v=v_0$. D'autre part, d'après les formules (4), et la façon dont on a défini le nombre ρ, les différences

$$\begin{array}{ll} F'_u(u,v)-F'_u(u',v'), & F'_v(u,v)-F'_v(u',v'), \\ \Phi'_u(u,v)-\Phi'_u(u',v'), & \Phi'_v(u,v)-\Phi'_v(u',v') \end{array}$$

sont moindres en valeur absolue que 3ε, pourvu que $|u-u'|$ et $|v-v'|$ soient plus petits que ρ. Or on a

$$\mathcal{F}'_u(u,v)=\frac{D[F'_u(u_0,v_0)-F'_u(u,v)]-B[\Phi'_u(u_0,v_0)-\Phi'_v(u,v)]}{AD-BC}$$

et trois relations analogues pour les autres dérivées $\mathcal{F}'_v$, $\mathcal{G}'_u$, $\mathcal{G}'_v$. Observons encore que les valeurs absolues des coefficients A, B, C, D sont inférieures à $\mathfrak{M}$, quel que soit le point (u_0, v_0) et que la valeur absolue de $AD-BC$ est supérieure à μ, car on a la relation générale

$$EG-F^2=\left[\frac{D(X,Y)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(Y,Z)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(Z,X)}{D(u,v)}\right]^2,$$

et les deux derniers jacobiens sont nuls pour $u=u_0$, $v=v_0$. Il s'ensuit que les valeurs absolues des dérivées partielles $\mathcal{F}_u$, $\mathcal{F}'_v$, $\mathcal{G}'_u$, $\mathcal{G}'_v$ sont inférieures à $\frac{6\mathfrak{M}\varepsilon}{\mu}$ lorsque les valeurs absolues des différences $u-u_0$, $v-v_0$ sont inférieures à ρ.

Le nombre positif ε étant arbitraire, supposons qu'on ait choisi ce nombre de façon que $\frac{6\mathfrak{M}\varepsilon}{\mu}$ soit inférieur à $\frac{1}{2}$, par exemple que l'on ait pris $\varepsilon=\frac{\mu}{18\mathfrak{M}}$; $\frac{6\mathfrak{M}\varepsilon}{\mu}$ est alors égal à $\frac{1}{3}$. Nous désignerons maintenant par ρ le nombre positif qui correspond à cette valeur de ε. Si les valeurs de X et de Y sont inférieures à $\frac{\rho\mu}{6\mathfrak{M}}$, on voit immédiatement qu'on aura aussi

$$\left|\frac{DX-BY}{AD-BC}\right|<\frac{\rho}{3}, \qquad \left|\frac{AY-BX}{AD-BC}\right|<\frac{\rho}{3},$$

et par conséquent, dans le domaine défini par la condition

$$\sqrt{X^2+Y^2}<\frac{\rho\mu}{6\mathfrak{M}},$$

les fonctions u et v de X et de Y définies par les équations (5), qui se réduisent à u_0 et v_0 pour $X = Y = 0$, sont régulières. Or le rayon de ce domaine est indépendant de (u_0, v_0) dans le domaine R, ce qui démontre la proposition que nous avions en vue.