BULLETIN DE LA S. M. F.

E. COTTON

Équations différentielles et équations intégrales

Bulletin de la S. M. F., tome 38 (1910), p. 144-154
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1910__38__144_1>

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET ÉQUATIONS INTÉGRALES;

PAR M. ÉMILE COTTON.

Étant donné un système d'équations différentielles, résolu par rapport aux dérivées des fonctions inconnues, on lui fait correspondre un système d'équations intégrales, en intégrant les deux membres des diverses équations dont il est composé. Cette remarque bien simple paraît cependant avoir servi de guide pour l'étude des équations intégrales.

J'indique ici une méthode plus générale pour établir une pareille correspondance (nos 1, 2), et je donne quelques propositions concernant l'existence et la détermination approchée des solutions des systèmes d'équations intégrales d'un type analogue à celui de Volterra, mais où les facteurs des noyaux ne sont pas linéaires par rapport aux fonctions inconnues (nos 3, 4, 6, 7). La méthode employée est celle des approximations successives, dont M. Picard a montré la grande fécondité dans l'étude des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles. Les déterminations les plus avantageuses (nos 6, 7) d'un intervalle de convergence pour ces approximations font intervenir des équations intégrales de comparaison linéaires; quelques lignes sont consacrées aux équations de ce type particulier (n° 5).

Enfin, l'application des résultats obtenus au cas des équations intégrales correspondant à des systèmes d'équations différentielles permet (n° 8) de retrouver et de compléter un peu les propositions que j'ai données antérieurement (1) au sujet de l'intégration approchée de ces systèmes.

---

(1) Ce *Bulletin*, t. XXXVI, 1908. Les renvois à ce travail sont désignés ici par la lettre B. La méthode suivie dans le présent article amène à le rapprocher d'un Mémoire inséré dans le Tome XXXI des *Acta mathematica*, p. 107.

1. Rappelons que la solution générale d'un système d'équations différentielles linéaires non homogène

$$(1) \qquad \frac{dz_i}{dt} - A_{i1}z_1 - \ldots - A_{in}z_n = B_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

est donnée par les formules [1]

$$(2) \qquad z_k = D_k(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} B_i(\alpha)\,\varphi_{ki}(t, \alpha)\,d\alpha \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où $D_1(t), \ldots, D_n(t)$ constituent la solution générale du système homogène correspondant à (1), c'est-à-dire de

$$(3) \qquad \frac{dz_i}{dt} - A_{i1}z_1 - \ldots - A_{in}z_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et où les fonctions $z_k = \varphi_{ki}(t, \alpha)$, que nous appellerons les *noyaux* correspondant aux systèmes (3) ou (5), considérées comme fonctions de t, vérifient le système (3) et satisfont aux conditions

$$\varphi_{ii}(\alpha, \alpha) = 1, \qquad \varphi_{ki}(\alpha, \alpha) = 0\,(k \neq i).$$

2. Nous donnerons alors au système différentiel à étudier la *forme pseudolinéaire*

$$(4) \quad \frac{dx_i}{dt} - A_{i1}(t)x_1 - \ldots - A_{in}(t)x_n = h_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et nous voyons, d'après ce qui précède, que *les solutions*

$$x_1 = g_1(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = g_n(t),$$

de ce système, vérifient le système d'équations intégrales

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_k(t) = D_k(t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ki}(t, \alpha)\,h_i[\alpha, g_1(\alpha), \ldots, g_n(\alpha)]\,d\alpha \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

où $D_1(t), \ldots, D_n(t)$ constituent le système de solutions de (3) satisfaisant aux mêmes conditions initiales que les solutions cher-

[1] *Voir* B., n° 9.

chées, c'est-à-dire que

$$D_1(t_0) = g_1(t_0), \quad \ldots, \quad D_n(t_0) = g_n(t_0).$$

On peut mettre un système différentiel sous la forme pseudolinéaire d'une infinité de façons, et utiliser les arbitraires que comporte cette transformation pour n'avoir affaire qu'à des fonctions h qui restent petites et varient lentement (au voisinage d'une courbe intégrale approchée connue) [1]. Ceci est avantageux pour les renseignements qu'on en peut déduire sur la courbe intégrale exacte comme aussi pour la rapidité de la convergence des développements, donnant les solutions exactes, fournis par la méthode des approximations successives.

Quant à l'intérêt que présente la transformation d'un système différentiel (4) en un système d'équations intégrales (5), il s'explique par la facilité avec laquelle on peut évaluer, d'une façon approchée, une intégrale définie et estimer l'approximation correspondante [2].

3. Nous considérerons maintenant un système d'équations intégrales (5) comme donné *a priori;* les fonctions

$$\varphi(t, \alpha), \quad h(t, x_1, \ldots, x_n), \quad D(t)$$

sont connues [3]; nous voulons, en nous limitant aux éléments réels, établir l'existence des solutions bien déterminées pour ce système dans un intervalle

$$t_0 \leqq t \leqq t_0 + \theta$$

lorsque les conditions suivantes sont remplies.

Dans un domaine D de la multiplicité $(t, x_1, \ldots, x_n)$ comprenant à son intérieur le point t_0, $D_1(t_0)$, $\ldots$, $D_n(t_0)$, les fonctions $h(t, x_1, \ldots, x_n)$ sont finies, continues, et satisfont, par rapport aux variables x, à certaines conditions de Lipschitz. Enfin,

---

(1) *Voir* B, Introduction et n^{os} 8 et 10.

(2) *Voir* B, n^{os} 11 et 12, et plus loin n° 8.

(3) Les fonctions φ et D n'ont pas nécessairement entre elles dans la suite les relations qu'elles ont dans le cas particulier du n° 2.

pour

$$(6) \qquad t_0 < \alpha < t < t_0 + T,$$

les fonctions $D(t)$ et $\varphi(t, \alpha)$ sont finies et continues ([1]).

4. Nous donnerons d'abord une démonstration rapide de cette proposition, donnant un intervalle de convergence plus restreint que celui que nous obtiendrons ultérieurement. Cette démonstration s'applique aux systèmes de la forme

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} g_k(t) = D_k(t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} F_k[t, \alpha, g_1(\alpha), \ldots, g_n(\alpha)]\, d\alpha \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

qui comprennent comme cas particulier les systèmes (5).

Nous admettons que, lorsque $(t, x_1, \ldots, x_n)$ reste dans un domaine D et que les inégalités (6) sont vérifiées, les fonctions

$$F_i(t, \alpha, x_1, \ldots, x_n)$$

sont continues et satisfont aux inégalités

$$(8) \qquad |F_i(t, \alpha, x_1, \ldots, x_n)| \leqq M$$

et aux conditions de Lipschitz

$$(9) \qquad \begin{array}{l} |F_i(t, \alpha, x_1, \ldots, x_n) - F_i(t, \alpha, x'_1, \ldots, x'_n)| \\ \qquad < K_1 |x_1 - x'_1| + \ldots + K_n |x_n - x'_n| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{array}$$

Ces hypothèses sont bien vérifiées dans le cas des systèmes (5), en vertu des suppositions du n° 3. Nous poserons, en outre,

$$(10) \qquad |F_i[t, \alpha, D_1(\alpha), \ldots, D_n(\alpha)]| < M_0.$$

Employons la méthode des approximations successives en prenant comme premières approximations

$$(11) \qquad g_1^0(t) = D_1(t), \qquad \ldots, \qquad g_n^0(t) = D_n(t),$$

([1]) Le cas où T est infini, et celui où quelques-unes des fonctions D et φ le deviennent, peuvent présenter un grand intérêt pratique et méritent une étude spéciale.

et calculant les suivantes par les formules

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{l} g_k^{p+1}(t) = \mathrm{D}_k(t) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{F}_k[t, \alpha, g_1(\alpha), \ldots, g_n(\alpha)]\, d\alpha \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

Comparons aux approximations analogues relatives au système

$$(13)\quad \gamma_1(t) = \gamma_2(t) = \ldots = \gamma_n(t) = \frac{\mathrm{M}_0}{\mathcal{K}} + \int_{t_0}^{t} [\mathrm{K}_1\gamma_1(\alpha) + \ldots + \mathrm{K}_n\gamma_n(\alpha)]\, d\alpha,$$
$$(\mathcal{K} = \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2 + \ldots + \mathrm{K}_n),$$

pour lequel les approximations de rang $p+1$ sont

$$(14)\quad \gamma_1^p(t) = \ldots = \gamma_n^p(t) = \frac{\mathrm{M}_0}{\mathcal{K}}\left[1 + \mathcal{K}(t-t_0) + \ldots + \frac{\mathcal{K}^p(t-t_0)^p}{1.2\ldots p}\right].$$

On voit de proche en proche que, quels que soient les indices i et p,

$$(15)\quad |g_i^p(t) - g_i^{p-1}(t)| < |\gamma_i^p(t) - \gamma_i^{p-1}(t)|,$$

et l'on en conclut que, si θ est assez petit pour que $\theta \leqq \mathrm{T}$ et que les points intérieurs à la gaine

$$(16)\quad t_0 < t < t_0 + \theta, \quad |x_i - \mathrm{D}_i(t)| \leqq \frac{\mathrm{M}_0}{\mathcal{K}}(e^{\mathcal{K}(t-t_0)} - 1) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

soient aussi intérieurs au domaine D, *toutes les approximations successives $g_i^p(t)$ sont bien définies et tendent, lorsque p augmente indéfiniment, vers des limites $g_i(t)$ vérifiant le système d'équations intégrales* (7). On démontre aisément que ce système de solutions est unique [1].

5. En procédant encore comme on le fait dans l'étude des équations différentielles, nous allons examiner le cas particulier,

---

[1] La démonstration précédente est une extension immédiate d'une démonstration donnée par M. Lindelöf (*Journal de Mathématiques*, 1894) de la convergence des approximations successives de M. Picard dans le cas des équations différentielles. Dans son intéressante Thèse (*Journal de Mathématiques*, 1908), M. Lalesco donne une démonstration (nº 12) analogue à celle de M. Picard (*Traité d'Analyse*, t. II) et qui conduit à des résultats qu'on déduit de ceux du texte, en y remplaçant la gaine (16) par la gaine

$$(16')\quad t_0 < t < t_0 + \theta < t_0 + \mathrm{T}, \quad |x_i - \mathrm{D}_i(t)| < \mathrm{M}(t - t_0).$$

important pour la suite, *des systèmes d'équations intégrales linéaires ou systèmes d'équations de Volterra* (¹).

Nous appelons ainsi les systèmes (7) où les F sont fonctions linéaires des variables x.

Soit

$$(17)\quad g_k(t) = \mathrm{D}_k(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \psi_{ki}(t, \alpha) g_i(\alpha)\, d\alpha \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

un tel système. Admettons que les fonctions $\mathrm{D}(t)$, $\psi(t, \alpha)$ soient continues lorsque les conditions (6) sont remplies; nous voyons immédiatement que *le système* (17) *admet un système de solutions bien déterminé dans l'intervalle* $t_0 < t < t_0 + \mathrm{T}$.

Remarques. — 1° On peut déterminer le système de solutions d'un système (17) par approximations successives, en prenant les premières approximations $g_k^0(t)$ toutes égales à zéro, car les approximations ainsi obtenues ne sont autres que les précédentes déplacées d'un rang.

2° Les conditions (6) étant remplies, supposons que dans le système (17) les fonctions $\mathrm{D}(t)$ soient positives et croissantes, les fonctions $\psi(t, \alpha)$ soient positives, les solutions de ce système sont manifestement dans l'intervalle $t_0 < t < t_0 + \mathrm{T}$ des fonctions positives et croissantes de t. On vérifie, en effet, de proche en proche, qu'il en est ainsi pour toutes les approximations successives.

3° Si l'on considère deux systèmes de la forme (17), le premier construit avec des fonctions $\mathrm{D}_k(t)$, $\psi_{ki}(t, \alpha)$, le second avec des fonctions $\mathrm{D}'_k(t)$, $\psi'_{ki}(t, \alpha)$ dominant les précédentes, c'est-à-dire telles qu'on ait (pour toutes les valeurs de k et i)

$$\mathrm{D}'_k(t) \geqq |\mathrm{D}_k(t)|, \qquad \psi'_{ki}(t, \alpha) \geqq |\psi_{ki}(t, \alpha)|;$$

les solutions $g'_k(t)$ du second dominent les solutions correspondantes $g_k(t)$ du premier (²)

$$|g'_k(t)| > g'_k(t).$$

(¹) *Voir* le n° 14 de la Thèse de M. Lalesco.

(²) La proposition analogue concernant les équations différentielles linéaires est due à M. Goursat (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1906, p. 443). Je ne connaissais pas cette partie du Mémoire de M. Goursat lorsque j'ai donné et utilisé cette proposition (B, n°ˢ 3 à 8).

6. Revenons aux systèmes d'équations intégrales du type

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} g_k(t) = D_k(t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ki}(t, \alpha) h_i[\alpha, g_1(\alpha), \ldots, g_n(\alpha)]\, d\alpha \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

considérés au début du n° 3. *Nous compléterons à leur sujet les résultats antérieurement obtenus en employant comme premières approximations des fonctions quelconques, et en utilisant comme équations de comparaison des équations intégrales linéaires.*

Admettons qu'on ait, dans le domaine D, comprenant à son intérieur le point t_0, $D_1(t_0)$, ..., $D_n(t_0)$, les inégalités

$$(18)\qquad |h_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq m_i(t),$$

$$(19)\qquad \begin{array}{l} |h_i(t, x_1, \ldots, x_n) - h_i(t, x'_1, \ldots, x'_n)| \\ \leqq c_{i1}(t)\,|x_1 - x'_1| + \ldots + c_{in}(t)\,|x_n - x'_n| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array}$$

les fonctions $c(t)$ étant positives, et que pour

$$(6)\qquad t_0 < \alpha < t < t_0 + T,$$

on ait, quels que soient k et i,

$$(20)\qquad |\varphi_{ki}(t, \alpha)| \leqq \Phi_{ki}(t, \alpha).$$

Soient maintenant $y_1(t)$, ..., $y_n(t)$ des fonctions continues définies dans l'intervalle

$$t_0 \leqq t \leqq t_0 + T,$$

telles que les points t_0, x_1, ..., x_n dont les coordonnées vérifient les inégalités

$$(21)\qquad |x_i - D_i(t_0)| \leqq \eta_i(t_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $\eta_i(t_0)$ sont des nombres supérieurs ou égaux aux modules des différences $y_i(t_0) - D_i(t_0)$, soient tous intérieurs à D.

Nous poserons

$$(22)\qquad |y_1(t) - D_1(t)| \leqq \eta_1(t), \qquad \ldots, \qquad |y_n(t) - D_n(t)| \leqq \eta_n(t),$$

les seconds membres des inégalités (22) étant égaux à ceux des inégalités (21) pour $t = t_0$.

Employons la méthode des approximations successives de M. Picard, en prenant comme premières approximations

(23) $$g_1^0(t) = y_1(t), \quad \ldots, \quad g_n^0(t) = y_n(t),$$

et déterminant les suivantes par la loi de récurrence

(24) $$\begin{cases} g_k^p(t) = \mathrm{D}_k(t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ki}(t, \alpha)\, h_i[\alpha, g_1^{p-1}(\alpha), \ldots, g_n^{p-1}(\alpha)]\, d\alpha \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Posons alors

(25) $$\lambda_k(t) = \eta_k(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \Phi_{ki}(t, \alpha)\, m_i(\alpha)\, d\alpha,$$

et *soit h un nombre inférieur à* T *tel que tous les points de la gaine*

(G) $$t_0 \leqq t \leqq t_0 + h, \qquad |x_k - y_k(t)| \leqq \lambda_k(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

soient intérieurs à D.

En reprenant avec M. Lalesco le raisonnement classique de MM. Picard et Lindelöf, on établit que dans l'intervalle

(I) $$t_0 \leqq t \leqq t_0 + h,$$

les approximations successives $g_k^p(t)$ sont toutes bien définies. On démontre ensuite leur convergence uniforme en la comparant à la convergence des approximations du système linéaire

(26) $$\gamma_k(t) = \lambda_k(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ki}(t, \alpha)\, c_{ij}(\alpha)\, \gamma_j(\alpha)\, d\alpha,$$

déterminées en prenant les premières approximations $\gamma_k^0(t)$ toutes nulles.

On conclut de là *que les solutions de* (5) *existent dans l'intervalle* (I) et *que les erreurs* $g_k(t) - y_k(t)$ *sont inférieures en valeur absolue aux fonctions positives* $\lambda_k(t)$ *définies par les équations* (25).

7. Mais on peut aussi déterminer, en procédant comme M. Lindelöf, un autre intervalle et d'autres limites pour les erreurs.

Posons [1]

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta_k(t) \geqq \left| \mathrm{D}_k(t) - y_k(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ki}(t, \alpha)\, h_i[\alpha, g_1^0(\alpha) \ldots g_n^0(\alpha)\, d\alpha \right| \\ &\qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \right.$$

Considérons les fonctions $\mu(t)$ solutions du système linéaire de comparaison

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mu_k(t) = \Delta_k(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ki}(t, \alpha)\, c_{ij}(\alpha)\, \mu_j(\alpha)\, d\alpha \\ &\qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \right.$$

et les approximations successives $\mu_k^p(t)$ correspondant aux premières approximations $\mu_k^0(t)$ toutes nulles. En comparant à la convergence de ces approximations et celle des fonctions $g_k^p(t)$ définies par les relations (23) et (24), on voit d'abord que toutes ces fonctions $g^p(t)$ existent et convergent uniformément dans l'intervalle (I_1) qui va être défini ci-dessous, et l'on obtient ensuite le résultat suivant :

Soit h_1 un nombre inférieur à T *tel que tous les points de la gaine*

$$(\mathrm{G}_1)\qquad t_0 \leqq t \leqq t_0 + h_1, \qquad [x_k - y_k(t)] \leqq \mu_k(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

soient intérieurs à D.

Dans l'intervalle

$$(\mathrm{I}_1)\qquad t_0 \leqq t \leqq t_0 + h_1,$$

les solutions de (5) *existent et les erreurs $g_k(t) - y_k(t)$ correspondant aux solutions approchées $y_k(t)$ sont inférieures en valeur absolue aux fonctions positives $\mu_k(t)$ solutions du système* (28).

Imaginons un système (28) où les fonctions $\Delta_k(t)$ soient arbitraires. On vérifie aisément que les solutions $\mu_k(t)$ d'un tel système peuvent, dans un intervalle donné $t_0 \leqq t \leqq t_0 + h$ être rendues aussi petites qu'on veut sous la seule condition que les $\Delta_k(t)$

---

[1] On peut dire que les fonctions $\Delta_k(t)$ dominent les erreurs *sur les équations* correspondant aux solutions approchées $y_k(t)$.

soient suffisamment petites dans le même intervalle. On en conclut que :

Pour que des fonctions ne présentent, par rapport aux solutions exactes d'un système d'équations intégrales (5), *que des erreurs inférieures, dans un intervalle donné* $t_0 \leqq t \leqq t_0 + h$, *à des nombres donnés, il suffit qu'elles soient assez près de satisfaire aux équations du système* ([1]).

Il est alors facile de voir que la méthode de Cauchy-Lipschitz est applicable à la détermination de solutions approchées, aussi voisines qu'on veut des solutions exactes, pour un système d'équations intégrales du type (5).

8. Appliquons les résultats précédents au cas où les équations intégrales (5) correspondent à un système différentiel (4). Posons

$$(29) \qquad \frac{dy_i}{dt} - \mathrm{A}_{i1} y_1 - \ldots - \mathrm{A}_{in} y_n = p_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

nous pouvons écrire

$$(30) \qquad y_k = \mathrm{D}'_k(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ki}(t, \alpha) p_i(\alpha)\, d\alpha \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$\mathrm{D}'_1, \ldots, \mathrm{D}'_k$ étant les solutions du système homogène (3) prenant pour t_0 les mêmes valeurs que $y_1, \ldots, y_n$.

Remplaçant dans (27) les y par leurs expressions (30) et admettant que pour $t_0 \leqq t \leqq t_0 + \mathrm{T}$ on ait

$$(31) \qquad \begin{aligned} &| h_i[t, y_1(t), \ldots, y_n(t)] - p_i(t) | < \overline{\mathrm{B}_i}(\alpha), \\ &| \mathrm{D}_i(t) - \mathrm{D}'_i(t) | < \theta_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}$$

on transforme les équations intégrales (28) dans les équations suivantes :

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mu_k(t) = \theta_k(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \Phi_{ki}(t, \alpha) \left[\overline{\mathrm{B}_i}(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(\alpha)\, \mu_j(\alpha) \right] d\alpha \\ &\qquad\qquad (k = 1, \ldots, n). \end{aligned} \right.$$

([1]) Voir *Acta mathematica*, t. XXXI, p. 115, n^{os} 7 à 12.

Dans le cas particulier où les y vérifient exactement les conditions initiales et où les Φ sont déterminés comme les noyaux correspondant à un système linéaire

$$(33) \qquad \frac{dz_i}{dt} - \mathcal{A}_{i1} z_1 - \ldots - \mathcal{A}_{in} z_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on peut substituer aux équations (32) les équations linéaires

$$(34) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\mu_i}{dt} - \mathcal{A}_{i1}\mu_1 - \ldots - \mathcal{A}_{in}\mu_n = c_{i1}\mu_1 + \ldots + c_{in}\mu_n + \overline{B_i} \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

On retrouve ainsi un résultat donné antérieurement (B, n° 13); mais il est clair qu'il peut être plus avantageux de déterminer les fonctions $\mu(t)$, dominant les erreurs correspondant aux solutions approchées, par un système d'équations intégrales tel que (32) ou (28). Il est bon d'observer aussi que, dans le cas actuel, les hypothèses sur les fonctions $h(t, x_1, \ldots, x_n)$ sont plus larges que celles faites alors (B, n° 5).

Pour retrouver la proposition donnée dans B, n° 11, écrivons les équations (5) à l'aide des identités (30) sous la forme

$$(35) \qquad \begin{cases} g_k(t) = y_k(t) + D_k(t) - D'_k(t) \\ \qquad + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ki}(t, \alpha) \{ h_i[\alpha, g_1(\alpha), \ldots, g_n(\alpha)] - p_i(\alpha) \} \, d\alpha \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Appliquons à ce système (35) la proposition du n° 6; prenons pour $\eta_1, \ldots, \eta_n$ les fonctions $\theta_1, \ldots, \theta_n$ figurant dans les inégalités 31; et supposons que pour les points $t_1, x_1, \ldots, x_n$ de D on ait

$$| h_i(t, x_1, \ldots, x_n) - p_i(t) | \leqq \beta_i(t),$$

nous obtenons

$$| g_k(t) - y_k(t) | \leqq \lambda_k(t) = \theta_k(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \Phi_{ki}(t, \alpha) \, \beta_i(\alpha) \, d\alpha.$$

On a bien le résultat annoncé, lorsque les conditions initiales étant exactement remplies, on peut prendre

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_k = 0.$$