BULLETIN DE LA S. M. F.

L. ZORRETTI

Sur la translation uniforme d'un corps de révolution dans un fluide visqueux

Bulletin de la S. M. F., tome 38 (1910), p. 261-263

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1910__38__261_0>

SUR LA TRANSLATION UNIFORME D'UN CORPS DE RÉVOLUTION DANS UN FLUIDE VISQUEUX;

PAR M. L. ZORETTI.

Je me propose d'étudier le mouvement de translation uniforme d'un corps de révolution, parallèlement à l'axe de révolution, dans un fluide visqueux indéfini au repos à l'infini. La solution du problème dépend d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

Prenons l'axe de révolution pour axe des z; supposons les axes des x et des y liés au corps. Nous allons étudier le mouvement relatif du fluide par rapport à ces axes. Servons-nous de coordonnées cylindriques r, θ, z. La vitesse u, v, w dépend de r, θ et z; mais la projection w ainsi que la pression p ne dépendent pas de θ. De plus, le vecteur vitesse rencontre Oz et l'on peut écrire

$$u = \cos\theta.\varphi(r, z), \qquad v = \sin\theta.\varphi(r, z).$$

Enfin, le mouvement relatif est évidemment permanent, en sorte que les équations indéfinies du mouvement lent sont

$$\Delta u = \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \Delta v = \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \Delta w = \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Transformons ces équations en prenant r, θ et z pour variables. On sait que la dernière se transforme en

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ou

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial r}(r\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(rw) = 0.$$

La troisième devient, comme on le voit aisément,

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Les deux premières se réduisent à l'équation unique

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\varphi}{r^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{3}$$

L'équation (1) conduit à poser

$$r\varphi = \frac{\partial \omega}{\partial z}, \qquad rw = -\frac{\partial \omega}{\partial r}$$

et à prendre comme inconnues ω et p. Il devient alors naturel d'éliminer p entre les équations (2) et (3), ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\varphi}{r^2}\right).$$

En remplaçant respectivement φ et w par $\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial z}$ et $\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}$, on obtient une équation en ω seul qui est du quatrième ordre. Je l'écris ci-dessous :

$$2r^3\frac{\partial^4 \omega}{\partial r^2\,\partial z^2} + r^3\frac{\partial^4 \omega}{\partial r^4} + r^2\frac{\partial^4 \omega}{\partial r\,\partial z^3}$$
$$+ r^2\frac{\partial^3 \omega}{\partial z^3} - 3r^2\frac{\partial^3 \omega}{\partial r^3} + r\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + 6r\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - 6\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0.$$

Examinons maintenant les conditions aux limites. A l'infini, on doit avoir $u = v = 0$, $w = -V$ en appelant V la vitesse de translation du solide dans le fluide. Il faut donc que $\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial z}$ soit nul à l'infini et que $\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}$ tende vers V. Sur la surface du corps qui a pour équation $F(r, z) = 0$, u, v et w doivent s'annuler, les deux dérivées de ω doivent donc s'annuler.

Cas de la sphère. — On peut retrouver ainsi la solution donnée par Oberdeck (*Journal de Crelle*, t. 81) pour le cas de la sphère et de l'ellipsoïde de révolution (Oberdeck a traité le cas général de l'ellipsoïde à axes inégaux se mouvant parallèlement à un de ses axes, qui échappe naturellement aux considérations actuelles). Je traite simplement le cas de la sphère; il suffit de prendre pour ω la solution

$$\omega = \text{const.} + \frac{r^2}{\sqrt{r^2+z^2}}\left(a - \frac{b}{r^2+z^2}\right) - \frac{Vr^2}{2},$$

c'est-à-dire pour φ et w

$$\varphi = \frac{rz}{(r^2+z^2)^2\sqrt{r^2+z^2}}[3b - a(r^2+z^2)],$$

$$-w = \frac{a(r^2+2z^2)}{(r^2+z^2)\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{b(r^2-2z^2)}{(r^2+z^2)^2\sqrt{r^2+z^2}} - \mathrm{V}.$$

En posant

$$\psi = \frac{a}{\sqrt{r^2+z^2}}, \qquad \psi_1 = \frac{b}{\sqrt{r^2+z^2}},$$

on trouve

$$u = z\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial z},$$

$$v = z\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y\,\partial z},$$

$$w = \mathrm{V} - \psi + z\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}.$$

Les conditions aux limites donnent immédiatement

$$3b = a\mathrm{R}^2,$$

$$b = \frac{\mathrm{R}^3\mathrm{V}}{4}$$

et, par suite,

$$a = \frac{3}{4}\mathrm{RV},$$

R désignant le rayon de la sphère.