BULLETIN DE LA S. M. F.

DE SPARRE

Note au sujet du pendule conique

Bulletin de la S. M. F., tome 38 (1910), p. 273-279
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1910__38__273_0>

NOTE AU SUJET DU PENDULE CONIQUE;

PAR M. LE COMTE DE SPARRE.

On connaît les théorèmes dus à Puiseux et à Halphen, en vertu desquels l'angle Φ formé par les plans verticaux passant par le pendule, au moment de son écart minimum et de l'écart maximum suivant, est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, théorèmes dont une démonstration élémentaire a été donnée par M. de Saint-Germain dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*.

On connaît également le théorème dû à Résal en vertu duquel, pour les petites oscillations, la projection horizontale du pendule décrit une ellipse dont les axes tournent dans le sens du mouvement avec une vitesse angulaire égale à

$$\frac{3}{8}\theta_1\theta_0\sqrt{\frac{l}{g}},$$

où θ_0 désigne l'angle d'écart maximum, θ_1 l'angle d'écart minimum, l la largeur du pendule, g la gravité.

Je me propose dans la petite Note qui va suivre, d'exposer une méthode permettant d'établir en même temps ces trois théorèmes.

I. Soient θ l'angle d'écart du pendule à un instant quelconque, φ l'angle du plan vertical passant par le pendule avec un plan vertical fixe, l la longueur du pendule.

Supposons qu'on prenne pour instant initial celui où l'angle d'écart θ_0 du pendule est maximum.

Les équations du mouvement, déduites du théorème des aires et de celui des forces vives, pourront s'écrire

$$\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt} = \sin^2\theta_0\varphi'_0, \tag{1}$$

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2} = \sin^2\theta_0\varphi_0'^2 + \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0), \tag{2}$$

où φ'_0 désigne la valeur initiale de $\frac{d\varphi}{dt}$ et, en remarquant que, d'après l'hypothèse faite, $\frac{d\theta}{dt}$ est nul à l'instant initial.

En tirant $\frac{d\varphi}{dt}$ de (1) et le portant dans (2) on aura

$$(3)\qquad \sin^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} = \left[\sin^2\theta_0\varphi_0'^2 + \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)\right]\sin^2\theta - \sin^4\theta_0\varphi_0'^2.$$

Posons maintenant

$$z = \sin^2\frac{\theta}{2},\qquad a = \sin^2\frac{\theta_0}{2},\qquad \mathrm{B} = a(1-a)\varphi_0'^2\frac{l}{g}.$$

Les équations (3) et (1) deviennent

$$(4)\qquad \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{4g}{l}(z-a)[z^2-(1+\mathrm{B})z+(1-a)\mathrm{B}],$$

$$(5)\qquad d\varphi = \frac{a(1-a)}{z(1-z)}\varphi'_0\,dt.$$

L'équation

$$(6)\qquad z^2-(1+\mathrm{B})z+(1-a)\mathrm{B} = 0$$

a, ainsi qu'on le voit de suite, une racine b comprise entre 0 et 1 et une racine c supérieure à 1.

La racine b correspond à l'angle d'écart minimum θ_1 qui est fourni par la relation

$$(7)\qquad \sin^2\frac{\theta_1}{2} = b.$$

On aura, d'après ce que nous avons dit,

$$(8)\qquad c > 1 > a > b > 0 \quad (^1).$$

Les relations entre les coefficients et les racines de l'équation (6),

$$(9)\qquad b+c = 1+\mathrm{B},$$

$$(10)\qquad bc = (1-a)\mathrm{B},$$

---

(1) On voit aussi que $b < 1-a$, d'où l'on conclut que, si θ_0 est plus grand que $\frac{\pi}{2}$, on a $\theta_1 < \pi - \theta_0$ puisqu'on a

$$\sin^2\frac{\theta_1}{2} < \cos^2\frac{\theta_0}{2} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right).$$

donnent d'ailleurs

$$(11)\qquad c = \frac{(1-b)(1-a)}{1-a-b} = 1 + \frac{ab}{1-a-b},$$

$$(12)\qquad B = \frac{b(1-b)}{1-a-b}.$$

L'équation (4) peut alors s'écrire

$$(13)\qquad \frac{dz^2}{dt^2} = \frac{4g}{l}(c-z)(a-z)(z-b),$$

et l'équation (5) devient par suite, en remarquant que z commence par décroître,

$$(14)\qquad d\varphi = -\frac{a(1-a)}{2z(1-z)}\varphi'_0\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{dz}{\sqrt{(c-z)(a-z)(z-b)}}.$$

Mais l'équation (10) donne, en tenant compte de la valeur de B,

$$abc = a(1-a)B = a^2(1-a)^2\varphi_0'^2\frac{l}{g},$$

de sorte que l'équation (14) peut s'écrire

$$(15)\qquad d\varphi = -\frac{1}{2(1-z)\sqrt{1-\frac{z}{c}}}\frac{dz}{z\sqrt{\left(1-\frac{z}{a}\right)\left(\frac{z}{b}-1\right)}}.$$

II. Nous allons établir d'abord les théorèmes de Puiseux et d'Halphen; pour cela, posons

$$\frac{1}{a} = \alpha, \qquad \frac{1}{b} = \beta, \qquad \frac{1}{c} = \gamma.$$

L'équation (15) pourra s'écrire

$$(16)\qquad d\varphi = \frac{1}{(1-z)\sqrt{1-\gamma z}}\frac{d\frac{1}{z}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{z}-\alpha\right)\left(\beta-\frac{1}{z}\right)}}.$$

Considérons maintenant l'expression

$$y = 1 + \lambda z - \frac{1}{\sqrt{1-\gamma z}},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dy}{dz} = \lambda - \frac{\gamma}{2(1-\gamma z)^{\frac{3}{2}}}, \tag{17}$$

et supposons

$$\lambda > \frac{\gamma}{2}, \tag{18}$$

pour $z = 0$, y est nul et sa dérivée positive; cette quantité est donc d'abord positive, lorsque z croît à partir de zéro, elle est d'ailleurs continue lorsque z croît de o à $\frac{1}{\gamma}$. Or sa dérivée admet une seule racine positive,

$$z = \frac{1}{\gamma}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\gamma^2}{4\lambda^2}}\right);$$

donc cette quantité d'abord positive ne peut s'annuler que pour une seule valeur de z comprise entre o et $\frac{1}{\gamma}$. Si donc on dispose de λ de façon que y soit nul pour $z = 1$ [1], il sera positif pour toutes les valeurs de z comprises entre o et 1.

La condition $y = 0$ pour $z = 1$ nous donne

$$\lambda = -1 + \frac{1}{\sqrt{1-\gamma}}. \tag{19}$$

D'ailleurs cette valeur de γ vérifie la relation (18). On déduit en effet de (19)

$$\lambda - \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma}} - 1 - \frac{\gamma}{2};$$

or,

$$\frac{1}{1-\gamma} - \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)^2 = \frac{\gamma^2}{4}\,\frac{3+\gamma}{1-\gamma} > 0;$$

λ étant choisi de cette façon, au moyen de l'équation (19), on a

$$1 + \lambda z > \frac{1}{\sqrt{1-\gamma z}},$$

et comme d'ailleurs on a évidemment

$$\frac{1}{(1-z)\sqrt{1-\gamma z}} > 1,$$

---

[1] Et en supposant que cette valeur de λ vérifie aussi la relation (18).

nous déduisons, de la valeur (16) de $d\varphi$,

$$\frac{d\frac{1}{z}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{z}-\alpha\right)\left(\beta-\frac{1}{z}\right)}} < d\varphi < \frac{1+\lambda z}{1+z}\,\frac{d\frac{1}{z}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{z}-\alpha\right)\left(\beta-\frac{1}{z}\right)}}.$$

Posons maintenant

$$\frac{1}{z} = \alpha\sin^2 u + \beta\cos^2 u,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d\frac{1}{z}}{2\sqrt{\left(\frac{1}{z}-\alpha\right)\left(\beta-\frac{1}{z}\right)}} = du.$$

Nous aurons

$$du < d\varphi < \frac{\frac{1}{z}+\lambda}{\frac{1}{z}-1}\,du = \left(1+\frac{\lambda+1}{\frac{1}{z}-1}\right)du.$$

Si alors nous prenons $u=0$ pour $\varphi=0$, nous aurons, en tenant compte de (19),

$$u < \varphi < u + \frac{1}{\sqrt{1-\gamma}}\cdot\int_0^u \frac{du}{(\alpha-1)\sin^2 u + (\beta-1)\cos^2 u}$$

ou

$$u < \varphi < u + \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma)(\alpha-1)(\beta-1)}}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{\alpha-1}{\beta-1}}\operatorname{tang} u\right);$$

mais l'équation (11) donne

$$(1-\gamma)(\alpha-1)(\beta-1) = \frac{(c-1)(1-b)(1-a)}{abc} = 1,$$

de sorte qu'on a en définitive

$$u < \varphi < u + \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{\alpha-1}{\beta-1}}\operatorname{tang} u\right). \tag{20}$$

Si dans cette formule, on fait $u=\frac{\pi}{2}$, φ devient l'angle Φ des plans verticaux passant par un angle d'écart minimum et par l'angle d'écart maximum suivant, et la formule (20) donne alors

$$\frac{\pi}{2} < \Phi < \pi,$$

III. Reste à établir le théorème de Résal; on doit supposer pour cela qu'on néglige les termes de l'ordre de θ^4.

Dans ces conditions la formule (11) donne [1]

$$c = 1, \qquad \gamma = 1,$$

et la formule (15) devient

$$(21) \qquad d\varphi = -(1-z)^{-\frac{3}{2}} \frac{dz}{2z\sqrt{\left(1-\frac{z}{a}\right)\left(\frac{z}{b}-1\right)}}.$$

Mais on a, avec la même approximation,

$$(1-z)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}z,$$

et l'équation (21) peut, par suite, s'écrire

$$(22) \qquad d\varphi + \frac{3}{4}\frac{\sqrt{ab}\,dz}{\sqrt{(a-z)(z-b)}} = \frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{z}}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{z}\right)}};$$

d'autre part, l'équation (13) nous donne

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{dz}{\sqrt{(a-z)(z-b)}}\frac{1}{\sqrt{c-z}},$$

et par suite, toujours aux termes en θ^4 près,

$$\frac{\sqrt{ab}\,dz}{\sqrt{(a-z)(z-b)}} = -2\sqrt{ab}\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt.$$

L'équation (22) pourra alors s'écrire [2]

$$d\varphi - \frac{3}{8}\theta_1\theta_0\,dt = \frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{z}}{\sqrt{\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{z}\right)}}.$$

---

(1) Puisque $a = \sin^2\frac{\theta_0}{2}$, $b = \sin^2\frac{\theta_1}{2}$.

(2) En remarquant que, avec l'approximation convenue,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\sin^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}} = \frac{\theta_1\theta_0}{4}.$$

Si l'on pose alors

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a}\sin^2\psi + \frac{1}{b}\cos^2\psi, \tag{23}$$

on aura

$$d\psi = d\varphi - \frac{3}{8}\theta_1\theta_0\,dt,$$

ou, en prenant $\varphi = \psi = 0$ pour $t = 0$,

$$\psi = \varphi - \frac{3}{8}\theta_1\theta_0 t.$$

D'ailleurs, si ρ désigne le rayon vecteur de la projection horizontale, ρ_0 et ρ_1 les valeurs de ρ pour $\theta = \theta_0$ et $\theta = \theta_1$, l'équation (23) devient, en négligeant toujours les termes en θ^4,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho_0^2}\sin^2\psi + \frac{1}{\rho_1^2}\cos^2\psi, \tag{24}$$

équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes.

La projection horizontale du pendule décrit donc, pour les petites oscillations, une ellipse mobile dont les axes tournent autour du centre, dans le sens du mouvement, avec une vitesse angulaire égale à

$$\frac{3}{8}\theta_1\theta_0\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

C'est le théorème de Résal.