BULLETIN DE LA S. M. F.

TRAYNARD

Sur une surface hyperelliptique du quatrième degré sur laquelle trente droites sont tracées

Bulletin de la S. M. F., tome 38 (1910), p. 280-283
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1910__38__280_0>

SUR UNE SURFACE HYPERELLIPTIQUE DU QUATRIÈME DEGRÉ SUR LAQUELLE TRENTE DROITES SONT TRACÉES [1];

Par M. Traynard.

Je rappelle que si les coordonnées homogènes x, y, z, t d'un point sont proportionnelles à quatre fonctions thêta de deux variables, de même ordre, de même diviseur, de même caractéristique et de même parité, la surface ainsi déterminée est hyperelliptique de rang *deux*. Pour que cette surface soit du quatrième degré, les fonctions employées doivent présenter des singularités communes pour les demi-périodes seulement [2].

Je considère les fonctions thêta, d'ordre huit, de diviseur quatre, de caractéristique nulle, impaires; elles sont au nombre de six et s'annulent pour les seize demi-périodes; en leur donnant l'une d'elles, o, o, comme zéro triple, il en reste quatre linéairement distinctes; la surface correspondante est du quatrième degré.

Elle admet, comme courbes unicursales singulières, la cubique provenant du zéro triple et quinze droites provenant des zéros simples. Je représenterai ces droites par les symboles des quinze demi-périodes correspondantes [symboles de la forme $(\alpha\beta')$].

Certaines fonctions d'ordre quatre, égalées à zéro, sont les équations d'autres droites tracées sur la surface.

Les fonctions de caractéristiques $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, impaires, sont nulles pour douze demi-périodes parmi lesquelles o, o. On obtient, en les égalant à zéro, trois droites.

Les fonctions paires appartenant aux douze caractéristiques dont la deuxième colonne n'est pas formée de deux zéros, sont, pour

---

(1) L'exposé détaillé des propriétés de cette surface a constitué une partie du cours de la fondation Peccot en 1909-1910. J'en avais auparavant signalé l'existence dans une Note (*Comptes rendus*, t. CXLVI, p. 520).

(2) Pour le détail des propositions, *voir* ma Thèse (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1907, p. 77). Suivant MM. Enriques et Severi, j'appelle *diviseur* l'entier positif qui divise la première période, *rang* le nombre de couples u, v correspondant au même point (*Acta mathematica*, t. XXXII).

chacune, au nombre de deux et s'annulent pour huit demi-périodes; on peut leur donner o, o comme zéro double; les courbes correspondantes sont des droites au nombre de douze.

Je représenterai ces droites par le symbole de la caractéristique correspondante (symboles de la forme $\alpha\beta'$). Le Tableau suivant donne, pour chaque droite de la seconde catégorie, les droites de la première qu'elle rencontre :

44'	(12')	(13')	(14')	(21')	(22')	(23')	(24')	(31')	(32')	(33')	(34')
34'	(12')	(13')	(14')	(21')	(22')	(23')	(24')	(41')	(42')	(43')	(44')
24'	(12')	(13')	(14')	(31')	(32')	(33')	(34')	(41')	(42')	(43')	(44')
43'	(13')	(14')	(23')	(24')	(33')	(34')	(41')	(42')			
33'	(13')	(14')	(23')	(24')	(31')	(32')	(43')	(44')			
23'	(13')	(14')	(21')	(22')	(33')	(34')	(43')	(44')			
13'	(13')	(14')	(21')	(22')	(31')	(32')	(41')	(42')			
42'	(12')	(14')	(22')	(24')	(32')	(34')	(41')	(43')			

et ainsi de suite en reproduisant la même alternance.

Je ne ferai pas ici l'étude complète des courbes de la surface; il est facile de trouver les cubiques et les coniques que font prévoir les droites précédentes; je signale seulement que la fonction paire de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ et la fonction impaire de même caractéristique, admettant o, o comme zéro triple, donnent deux coniques situées dans un même plan quadritangent. Elles sont en relation remarquable avec les trente droites, et cette configuration peut être résumée de la façon suivante :

Il existe deux groupes de quinze droites partagés en trois droites α et douze droites α', trois droites β et douze droites β'.

Chaque droite α rencontre trois β et huit β'; chaque droite α' rencontre deux β et six β'; et réciproquement.

Le plan quadritangent contient une conique C rencontrant les droites α et β et une conique C' rencontrant les droites α' et β'.

L'existence des trente droites caractérise la surface.

Le simple examen du Tableau des droites montre qu'on peut les grouper en ensembles situés sur des quadriques.

Les droites α et α' et la conique C sont sur une quadrique A.

D'autres groupes moins immédiats contiennent deux droites de chaque nature. En se rappelant que les fonctions thêta correspondantes doivent donner un produit à caractéristique nulle, on voit que les droites β' doivent avoir leur symbole terminé par un même chiffre et les groupes se forment alors très facilement. Ils sont au nombre de dix-huit.

Je prends la quadrique A sous la forme $xy - zt = 0$ avec les génératrices

$$\begin{array}{llllll} 24' & x = z = 0; & 34' & y = z,\ x = t; & 44' & y = t = 0. \\ (12') & x = t = 0; & (13') & x = z,\ y = t; & (14') & y = z = 0. \end{array}$$

Les coordonnées ne peuvent plus subir de transformation homographique.

On peut alors trouver très facilement les dix-huit quadriques. En voici douze :

(1)	24′ 44′ 12′ 32′ (12′) (14′) (31′) (33′)	$xy - azt = 0$
(2)	24′ 44′ 22′ 42′ (12′) (14′) (32′) (34′)	$xy + azt = 0$
(3)	34′ 44′ 12′ 22′ (12′) (14′) (21′) (23′)	$y(x-t) - bt(y-z) = 0$
(4)	34′ 44′ 32′ 42′ (12′) (14′) (22′) (24′)	$y(x-t) + bt(y-z) = 0$
(5)	24′ 34′ 12′ 42′ (12′) (14′) (41′) (43′)	$az(x-t) - bx(y-z) = 0$
(6)	24′ 34′ 22′ 32′ (12′) (14′) (42′) (44′)	$az(x-t) + bx(y-z) = 0$
(7)	24′ 44′ 11′ 31′ (12′) (13′) (31′) (34′)	$x(y-t) - ct(x-z) = 0$
(8)	24′ 44′ 21′ 41′ (12′) (13′) (32′) (33′)	$x(y-t) + ct(x-z) = 0$
(9)	34′ 44′ 11′ 21′ (12′) (13′) (21′) (24′)	$(x-t)(y-t) - dt(x+y-z-t) = 0$
10)	34′ 44′ 31′ 41′ (12′) (13′) (22′) (23′)	$(x-t)(y-t) + dt(x+y-z-t) = 0$
(11)	24′ 34′ 11′ 41′ (12′) (13′) (41′) (44′)	$c(x-t)(y-t) - dx(x+y-z-t) = 0$
(12)	24′ 34′ 21′ 31′ (12′) (13′) (42′) (43′)	$c(x-t)(y-t) + dx(x+y-z-t) = 0$

On peut obtenir les équations des trente droites par les intersections de ces quadriques deux à deux.

Je cherche alors une surface du quatrième degré qui les contient; les quatorze droites des quadriques A, (1) et (2) suffisent pour déterminer les coefficients, en fonction de a, b, c, d. En coupant par la quadrique (3), on trouve la relation

$$(a^2-1)(d^2-1) = (b^2-1)(c^2-1).$$

Si cette relation est satisfaite, les droites des quadriques (3) et (4) sont sur la surface et il est alors bien facile de voir qu'il en est de même pour toutes les autres.

L'équation de la surface est obtenue sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&(a^2 - b^2)(1 - c^2)x^2(xy + zt - 2yz - 2yt)\\
&+ (a^2 - c^2)(1 - b^2)y^2(xy + zt - 2xz - 2xt)\\
&+ (a^2 - b^2)(a^2 - c^2)z^2(xy + zt - 2xt - 2yt)\\
&+ a^2(1 - b^2)(1 - c^2)t^2(xy + zt - 2xz - 2yz)\\
&+ 2(a^2 - b^2 - c^2 + b^2c^2)(xy + a^2z^2t^2)\\
&+ 4(a^2 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2)xyzt = 0.
\end{aligned}$$

Le plan quadritangent a pour équation

$$\begin{aligned}
&(a^2 - b^2)(1 - c^2)x\\
&\quad + (a^2 - c^2)(1 - b^2)y - (a^2 - b^2)(a^2 - c^2)z - a^2(1 - b^2)(1 - c^2)t = 0.
\end{aligned}$$

En résumé : la configuration des trente droites se rencontrant deux à deux ainsi qu'il a été expliqué dépend de quatre paramètres. Exprimer qu'elles sont sur une surface du quatrième degré leur impose une condition. La surface ainsi obtenue, qui dépend de trois paramètres, est hyperelliptique [1].

---

[1] *Voir* CHILLEMI, *Comptes rendus*, 26 avril 1909.

FIN DU TOME XXXVIII.