BULLETIN DE LA S. M. F.

E. BLUTEL

Sur une méthode d'approximation

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 155-159
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__155_1>

SUR UNE MÉTHODE D'APPROXIMATION;

PAR M. E. BLUTEL.

Soit $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ un polynome entier donné à coefficients complexes et à variable complexe. Pour toute valeur de z dont l'affixe est un point intérieur à un contour donné C, les polynomes $f(z)$, $\frac{1}{1} f'(z)$, $\frac{1}{1.2} f''(z)$, $\ldots$, $\frac{1}{n!} f^{(n)}(z)$, ont des modules limités supérieurement; soit l une limite supérieure commune à ces différents modules.

Si l'on pose $z = z_0 + u$, z_0 ayant pour affixe un point quelconque A_0, intérieur à C,

$$f(z_0 + u) = f(z_0) + u \frac{f'(z_0)}{1} + u^2 \frac{f''(z_0)}{1.2} + \ldots + u^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

est un polynome entier en u, dont les coefficients ont des modules moindres que l.

Posons en général :

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = \alpha_0^{(k)} e^{i\theta_0^{(k)}};$$

tous les nombres $\alpha_0^{(k)}$ sont inférieurs à l.

Soit A_0 un point quelconque du plan, tel que $f(z_0)$ et $f'(z_0)$ ne soient nuls ni l'un ni l'autre. Prenons comme contour C un cercle dont le centre est A_0 et tel que, pour tout point extérieur à C, le module de $f(z)$ soit supérieur au module α_0 de $f(z_0)$; on sait toujours déterminer un tel cercle et un nombre l correspondant. Tout point A donnant à $f(z)$ un module inférieur à α_0 est donc intérieur à C.

Cherchons, dans le voisinage de A_0, un point A_1 d'affixe

$$z_1 = z_0 + u_1,$$

donnant à $f(z)$ un module α_1 moindre que α_0. Si nous posons,

$$u = \rho e^{i\omega},$$

nous obtenons :

$$f(z) = \alpha_0 e^{i\theta_0} + \alpha'_0 \rho e^{i(\theta'_0+\omega)} + \alpha''_0 \rho^2 e^{i(\theta''_0+2\omega)} + \ldots + \alpha_0^{(n)} \rho^n e^{i(\theta_0^{(n)}+n\omega)},$$

d'où :

$$\begin{aligned}
|f(z)|^2 = {} & [\alpha_0 \cos\theta_0 + \alpha'_0 \rho \cos(\theta'_0 + \omega) \\
& \qquad + \alpha''_0 \rho^2 \cos(\theta''_0 + 2\omega) + \ldots + \alpha_0^{(n)} \rho^n \cos(\theta_0^{(n)} + n\omega)]^2 \\
& + [\alpha_0 \sin\theta_0 + \alpha'_0 \rho \sin(\theta'_0 + \omega) + \ldots + \alpha_0^{(n)} \rho^n \sin(\theta_0^{(n)} + n\omega)]^2 \\
= {} & \alpha_0^2 + 2\alpha_0 \alpha'_0 \rho \cos(\theta'_0 - \theta_0 + \omega) \\
& + [2\alpha_0 \alpha''_0 \cos(\theta''_0 - \theta_0 + 2\omega) + \alpha'^2_0] \rho^2 \\
& + [2\alpha_0 \alpha'''_0 \cos(\theta'''_0 - \theta_0 + 3\omega) \\
& \quad + 2\alpha'_0 \alpha''_0 \cos(\theta''_0 - \theta'_0 + \omega)] \rho^3 + \ldots + \alpha_0^{(n)2} \rho^{2n}.
\end{aligned}$$

Quelle que soit la valeur attribuée à ω, les coefficients de ρ^2, ρ^3, ..., ρ^{2n}, dans ce polynome sont limités supérieurement par $2\alpha_0\alpha''_0 + \alpha'^2_0$, $2\alpha_0\alpha'''_0 + 2\alpha'_0\alpha''_0$, ..., $\alpha_0^{(n)2}$, et, *a fortiori*, par $3l^2$, $4l^2$, $5l^2$, ..., l^2. Il est facile de voir que le plus grand de ces derniers nombres vaut $(n+1)l^2 = L$.

On peut donc affirmer qu'on a

$$|f(z)|^2 < \alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha'_0 \rho \cos(\theta'_0 - \theta_0 + \omega) + L(\rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^{2n}),$$

quel que soit u.

Supposons $\rho < 1$; alors $\rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^{2n}$ est moindre que $\frac{\rho^2}{1-\rho}$, de sorte que

$$|f(z)|^2 < \alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha'_0 \rho \cos(\theta'_0 - \theta_0 + \omega) + \frac{\rho^2 L}{1-\rho}.$$

En particulier, prenons $\frac{\rho_1 L}{1-\rho_1} = \alpha_0 \alpha'_0$, d'où

$$\rho_1 = \frac{\alpha_0 \alpha'_0}{L + \alpha_0 \alpha'_0} < 1,$$

et $\omega = \omega_1 = \theta_0 - \theta'_0 + \pi$. Alors $u_1 = \rho_1 e^{i\omega_1}$, et

$$|f(z_1)|^2 < \alpha_0^2 - \alpha_0 \alpha'_0 \rho_1 = \left(\alpha_0 - \frac{\alpha'_0 \rho_1}{2}\right)^2 - \frac{\alpha'^2_0 \rho_1^2}{4} < \left(\alpha_0 - \frac{\alpha'_0 \rho_1}{2}\right)^2.$$

Représentons par α_1 et α'_1 les modules de $f(z_1)$ et de $f'(z_1)$; nous pouvons écrire

$$\alpha_1^2 < \left(\alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha'_0 \rho_1\right)^2$$

et, par suite,

$$\alpha_1 < \alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha'_0 \rho_1,$$

car le second membre est positif, puisque $\alpha_0 - \alpha'_0 \rho_1$ l'est.

Le point A_1 ainsi obtenu est intérieur à C puisque $\alpha_1 < \alpha_0$; si α_1 et α'_1 ne sont nuls ni l'un ni l'autre, nous pourrons répéter le raisonnement et déterminer un point A_2 dont l'affixe $z_2 = z_1 + u_2$ est définie par les équations

$$u_2 = \rho_2 e^{i\omega_2}, \qquad \rho_2 = \frac{\alpha_1 \alpha'_1}{L + \alpha_1 \alpha'_1}, \qquad \omega_2 = \theta_1 - \theta'_1 + \pi.$$

Ce point A_2 donnera à $f(z)$ un module α_2 tel que

$$\alpha_2 < \alpha_1 - \frac{1}{2} \alpha'_1 \rho_2$$

et sera encore intérieur à C.

On pourra recommencer si $\alpha_2 \alpha'_2$ n'est pas nul. On sera conduit de la sorte à un point zéro de $f(z)$ ou de $f'(z)$, ou bien on pourra répéter la transformation indéfiniment, en utilisant toujours le même nombre L, puisque les points successifs $A_0, A_1, \ldots, A_p$ sont toujours intérieurs à C.

Ajoutons les inégalités

$$\alpha_1 < \alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha'_0 \rho_1, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{p+1} < \alpha_p - \frac{1}{2} \alpha'_p \rho_{p+1},$$

nous obtenons

$$2(\alpha_0 - \alpha_{p+1}) > \alpha'_0 \rho_1 + \alpha'_1 \rho_2 + \ldots + \alpha'_p \rho_{p+1},$$

et nous concluons que la série, dont le terme général est $\alpha'_p \rho_{p+1}$, est convergente, de sorte que le produit $\frac{\alpha_p \alpha'^2_p}{L + \alpha_p \alpha'_p}$ tend vers zéro. Comme le dénominateur de cette fraction est inférieur à

$$(n+2)\, l^2,$$

le numérateur tend vers zéro, ainsi que le produit $\alpha_p \alpha'_p$. En même temps, ρ_{p+1} tend vers zéro.

Soient $M_1, M_2, \ldots, M_n$ les points zéros de $f(z)$ et $M'_1, M'_2, \ldots, M'_{n-1}$ ceux de $f'(z)$. Le produit des distances du point A_p à ces différents points tend vers zéro en même temps que la distance $A_p A_{p+1}$; le point A_p a donc pour position limite un des points zéros de $f(z)$ ou de $f'(z)$. Cela démontre également la convergence de la série $z_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_p + \ldots$, dont la somme est l'affixe du point limite.

On peut appliquer ce raisonnement à la démonstration du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques entières. Admettons que tout polynome entier, à coefficients complexes de degré moindre que n, possède au moins un zéro complexe, et par suite en possède un nombre égal à son degré (zéros distincts ou non). Proposons-nous de démontrer que tout polynome entier $f(z)$ de degré n admet au moins un zéro. Parmi les points zéros de $f'(z)$ distinguons celui qui fait acquérir à $f(z)$ le plus petit module; soit M'_1 ce point et soit β le module non nul qu'il donne à $f(z)$. On sait qu'on peut déterminer au voisinage de M'_1 un point A_0 donnant à $f(z)$ un module α_0 moindre que β. Prenons ce point A_0 comme point de départ et effectuons la transformation indiquée plus haut; les modules $\alpha'_0, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_p$, acquis par $f'(z)$ au cours de ces opérations, sont limités inférieurement, si grand que soit p, par un nombre positif, sans quoi le produit des distances du point A_p à l'un des points $M'_1, M'_2, \ldots, M'_{n-1}$ pourrait devenir moindre que tout nombre positif, ce qui est contraire au fait que α_p est moindre que α_0. Par suite, ou bien les opérations conduiront à un point A_p tel que $\alpha_p = 0$, c'est-à-dire qu'on tombera sur un zéro de $f(z)$, ou bien elles se continueront indéfiniment de telle sorte que α_p tende vers zéro. De plus, la convergence de la série, dont le terme général est $\alpha'_p \rho_{p+1}$, entraîne celle de la série dont le terme général est ρ_p.

La série $z_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_p + \ldots$ est donc absolument convergente; soit B le point affixe de sa somme ζ. Le point A_p a pour limite B et comme $f(z_p)$ tend vers zéro, c'est que

$$f(\zeta) = 0.$$