BULLETIN DE LA S. M. F.

M. SERVANT

Surfaces isothermiques et surface de Bonnet qui se rattachent à la déformation des quadriques

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 162-169
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__162_1>

SURFACES ISOTHERMIQUES ET SURFACES DE BONNET, QUI SE RATTACHENT A LA DÉFORMATION DES QUADRIQUES;

PAR M. MAURICE SERVANT.

Dans une série de Notes insérées aux *Comptes rendus* en 1899, M. Darboux a mis en évidence par une méthode géométrique une série de surfaces isothermiques qui se rattachent d'une façon étroite au problème de la déformation des quadriques. Dans cette Note, nous retrouverons ces mêmes surfaces par une méthode toute différente qui fournit également des surfaces d'Ossian Bonnet.

Surfaces isothermiques. — Considérons une surface rapportée à ses lignes de longueur nulle; elle est définie intrinséquement par les deux formes quadratiques

$$ds^2 = 2\lambda\, du\, dv,$$
$$\mathrm{S}\, dc\, dx = \mathrm{D}\, du^2 + 2\mathrm{D}'du\, dv + \mathrm{D}''\, dv^2,$$

les équations de Gauss et Codazzi s'écrivent

$$\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial v} - \frac{\partial \mathrm{D}'}{\partial u} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\mathrm{D}' = 0,$$
$$\frac{\partial \mathrm{D}''}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{D}'}{\partial v} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\mathrm{D}' = 0,$$
$$\mathrm{D}\mathrm{D}'' - \mathrm{D}'^2 = \lambda\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u\, \partial v}.$$

Posons

$$D = \Delta, \qquad D'' = \Delta'', \qquad D' = \lambda\Delta',$$

elles deviennent

$$\lambda\frac{\partial\Delta'}{\partial u} = \frac{\partial\Delta}{\partial v}, \qquad \lambda\frac{\partial\Delta'}{\partial v} = \frac{\partial\Delta''}{\partial u},$$
$$\frac{\Delta\Delta''}{\lambda^2} - \Delta'^2 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial u\,\partial v};$$

on a, alors, simplement

$$\frac{1}{rr_1} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\log\lambda}{\partial u\,\partial v}, \qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = -2\Delta'$$

(r et r_1 désignant les rayons de courbure principaux).

Si la surface est isothermique, on voit de suite qu'on aura

$$\frac{\Delta}{\Delta''} = \frac{U(u)}{V(v)},$$

et, par conséquent, en choisissant convenablement les variables,

$$\Delta = \Delta''.$$

Surfaces de Bonnet. — Avec ce système particulier de coordonnées, on trouve de suite les propriétés caractéristiques des surfaces de Bonnet, qui admettent une déformation conservant les rayons de courbure principaux. En effet, soient S une telle surface et

$$ds^2 = 2\lambda\,du\,dv,$$
$$\Delta\,du^2 + 2\lambda\Delta'\,du\,dv + \Delta''\,dv^2$$

les deux formes quadratiques qui la définisse intrinsèquement.
S'il existe une surface S_1 applicable sur S avec conservation des rayons de courbure principaux, ses éléments seront évidemment de la forme

$$\Delta_1 = \Delta + U, \qquad \Delta''_1 = \Delta'' + V, \qquad \Delta'_1 = \Delta',$$

et l'on devra avoir

$$\Delta_1\Delta''_1 = \Delta\Delta'',$$

d'où

$$\frac{\Delta''}{V(v)} + \frac{\Delta}{U(u)} + 1 = 0.$$

Or, on peut toujours déterminer V et U de telle sorte qu'on ait

$$\Delta + \Delta'' = 2m;$$

on peut donc poser

$$\Delta = \delta + m, \qquad \Delta'' = \delta - m,$$

et les équations de Gauss s'écrivent

$$\lambda \frac{\partial \Delta'}{\partial u} = \frac{\partial \delta}{\partial v}, \qquad \lambda \frac{\partial \Delta'}{\partial v} = \frac{\partial \delta}{\partial u}, \qquad \frac{\delta^2 - m^2}{\lambda^2} - \Delta'^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \log \lambda}{\partial u \, \partial v},$$

la surface S_1 s'obtient en permutant Δ et Δ''.

Déformation des quadriques. — Pour résoudre le problème de la déformation, on peut, ainsi que l'a montré M. Darboux, chercher les lignes de la surface qui deviennent des asymptotiques de la surface déformée; nous les nommerons, avec M. Bianchi, les *asymptotiques virtuelles* de la surface.

M. Darboux a donné les équations des asymptotiques virtuelles pour une surface quelconque ; dans le cas d'une quadrique, elles prennent une forme particulièrement simple. Si l'on suppose la surface rapportée à ses génératrices rectilignes, il vient

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial a}{\partial \alpha} \frac{\partial b}{\partial \alpha} = \frac{\partial a}{\partial \beta} \frac{\partial b}{\partial \beta} = \Omega,$$

a et b étant les paramètres des génératrices rectilignes et Ω étant une quantité qui dépend de la nature de la quadrique, mais qui rentre toujours dans la forme générale

$$\Omega = A a^2 b^2 + B a^2 + C b^2 + D ab + E.$$

Posons

$$\text{(1)} \qquad \lambda \frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{\partial b}{\partial \beta}, \qquad \lambda \frac{\partial a}{\partial \beta} = \frac{\partial b}{\partial \alpha},$$

il vient par un calcul facile

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}.$$

Supposons que dans Ω

$$A = -\frac{1}{2}, \qquad B = C = 0,$$

il vient

$$\text{(2)} \qquad \frac{b^2}{\lambda^2} - a^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \alpha \, \partial \beta},$$

et l'on voit que les équations (1) et (2) sont précisément les équations de Gauss, relatives à une surface isothermique.

Par conséquent, si l'on peut mettre Ω sous la forme

$$\text{(C)} \qquad \Omega = \frac{1}{2} a^2 b^2 + \mathrm{D} ab + \mathrm{E},$$

les formes quadratiques

$$ds^2 = 2\lambda \, d\alpha \, d\beta,$$
$$b(d\alpha^2 + d\beta^2) + 2\lambda a \, d\alpha \, d\beta$$

définiront intrinsèquement une surface isothermique.

Plus généralement, si l'on a

$$\text{(D)} \qquad \Omega = -\frac{1}{2} a^2 b^2 + \frac{\mathrm{B}^2}{2} a^2 + \mathrm{D} ab + \mathrm{E},$$

il vient

$$\text{(3)} \qquad \frac{b^2 - \mathrm{B}^2}{\lambda^2} - a^2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial\alpha \, \partial\beta}.$$

Les formules (1) et (3) deviennent alors les équations de Gauss, relatives à une surface de Bonnet qui sera définie par les formes quadratiques

$$ds^2 = 2\lambda \, d\alpha \, d\beta,$$
$$(b + \mathrm{B}) \, d\alpha^2 + 2\lambda a \, d\alpha \, d\beta + (b - \mathrm{B}) \, d\beta^2 = 0.$$

On voit facilement comment on peut ramener Ω aux formes (C) et (D). Considérons, en effet, les équations (A) et effectuons le changement de variables

$$a = \frac{m a_1 + n}{p a_1 + q}, \qquad b = \frac{m_1 b_1 + n_1}{p_1 b_1 + q_1};$$

elles prendront la forme

$$\frac{\partial a_1}{\partial\alpha} \frac{\partial b_1}{\partial\alpha} = \frac{\partial a_1}{\partial\beta} \frac{\partial b_1}{\partial\beta}$$
$$= \mathrm{A}_1 a_1^2 b_1^2 + \mathrm{B}_1 a_1^2 b_1 + \mathrm{C}_1 a_1 b_1^2 + \mathrm{D}_1 a_1^2 + \mathrm{E}_1 b_1^2 + \mathrm{E}_1 a_1 b_1 + \ldots,$$

et les équations (1) deviennent

$$\lambda_1 \frac{\partial a_1}{\partial\alpha} = \frac{\partial b_1}{\partial\beta}, \qquad \lambda_1 \frac{\partial a_1}{\partial\beta} = \frac{\partial b_1}{\partial\alpha},$$

où l'on a

$$\lambda_1 = \lambda \frac{(p_1 b_1 + q_1)^2}{(pa_1 + q)^2} \frac{mq - np}{m_1 q_1 - n_1 p_1}.$$

Pour avoir des surfaces isothermiques, il faudra déterminer m, n, m_1, n_1 par les conditions

$$A_1 = -\frac{1}{2}, \qquad B_1 = C_1 = D_1 = E_1 = 0.$$

Pour avoir des surfaces de Bonnet, on aura les conditions

$$A_1 = -\frac{1}{2}, \qquad B_1 = C_1 = E_1 = 0.$$

Ces surfaces isothermiques et de Bonnet se présentent sous une forme élégante, si l'on fait intervenir les fonctions elliptiques.

Considérons une quadrique quelconque, son élément linéaire peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = \frac{H}{4}(u - v)\left[\frac{du^2}{u^2 \Delta\left(\frac{1}{u}\right)} - \frac{dv^2}{v^2 \Delta\left(\frac{1}{v}\right)}\right],$$

où H désigne le hessien de la surface, et $\Delta(S)$ le premier membre de l'équation en S. Posons

$$\alpha^3 \Delta\left(\frac{1}{\alpha}\right) = (a - \alpha)(b - \alpha)(c - \alpha)$$

et

$$\begin{aligned} \rho^2 e_1 &= \frac{a + b + c}{3} - a, \\ \rho^2 e_2 &= \frac{a + b + c}{3} - b, \qquad & \rho^2 pu &= \frac{a + b + c}{3} - \alpha, \\ \rho^2 e_3 &= \frac{a + b + c}{3} - c, \qquad & \rho^2 pw &= \frac{a + b + c}{3}; \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} a - \alpha &= \rho^2(pu - e_1), \\ b - \alpha &= \rho^2(pu - e_2), \\ c - \alpha &= \rho^2(pu - e_3), \end{aligned}$$

et l'élément linéaire s'écrit

$$ds^2 = k(pu - pv)[(pu - pw)\,du^2 - (pv - pw)\,dv^2].$$

La déformation de cette quadrique revient à l'habillage de la forme [1]

$$d\varphi^2 = -\left(\frac{1}{\wp u - \wp w} - \frac{1}{\wp u - \wp w}\right)(du^2 - dv^2);$$

si l'on pose

$$u = x + y,$$
$$v = x - y,$$

il vient facilement

$$d\varphi^2 = \frac{4[\wp(x+y) - \wp(x-y)]}{\wp(x+y)\wp(x-y) - \wp w[\wp(x+y) + \wp(x-y)] + \wp^2 w}\,dx\,dy,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{-4\wp'(x)\wp'(y)\,dx\,dy}{\left\{\begin{array}{l}\left(\wp x\wp y + \frac{1}{4}g^2\right)^2 + g_3(\wp x + \wp y) \\ \quad - \wp w\left[2\left(\wp x \wp y - \frac{1}{4}g_2\right)(\wp x + \wp y) - g_3\right] + \wp^2 w(\wp x - \wp y)^2\end{array}\right\}},$$

ou en posant

$$\wp x = a, \qquad \wp y = b,$$

$$d\varphi^2 = \frac{4\,da\,db}{\left(ab + \frac{1}{4}g_2\right)^2 + g_3(a+b) - \wp w\left[2\left(ab - \frac{1}{4}g_2\right)(a+b) - g_3\right] + \wp^2 w(a-b)^2},$$
$$= \frac{2\,da\,db}{\Omega}$$

on a, alors,

$$-\frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} = (b - \wp w)^2, \qquad -\frac{\partial^2\Omega}{\partial b} = (a - \wp w)^2;$$

donc, si l'on pose

$$\lambda = \frac{\dfrac{\partial a}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial b}{\partial \beta}}, \qquad \frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial b}{\partial \alpha} = \frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial b}{\partial \beta} = \Omega,$$

il vient

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \log \lambda}{\partial \alpha\,\partial \beta} = \frac{(\wp y - \wp w)^2}{\lambda^2} - (\wp x - \wp w)^2,$$

---

[1] *Comptes rendus*, 1902.

et les deux formes quadratiques

$$ds^2 = 2\lambda\, d\alpha\, d\beta,$$
$$(py - pw)(d\alpha^2 + d\beta^2) + 2\lambda(px - pw)\, d\alpha\, d\beta$$

définissent une surface isothermique.

Considérons la formule fondamentale

$$d\varphi^2 = -\left(\frac{1}{pu - pw} - \frac{1}{pv - pw}\right)(du^2 - dv^2)$$

et faisons le changement de variable

$$u = u_1 + \omega_1, \qquad v = v_1 + \omega_1,$$

ω_1 étant une demi-période ; il vient, par un calcul facile,

$$\frac{[p(w + \omega_1) - e_1]^2}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}\left[\frac{1}{pu - p(w + \omega)} - \frac{1}{pv_1 - p(w + \omega)}\right](du_1^2 - dv_1^2),$$

si l'on pose

$$\frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p(w + \omega_1) - e} = k^2,$$

$$w + \omega = w_1, \qquad u_1 = x_1 + y_1, \qquad v_1 = x_1 - y_1, \qquad pu_1 = a_1, \qquad py_1 = b_1.$$

On voit que λ_1 étant défini par

$$\lambda_1 = \frac{\dfrac{\partial a_1}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial b_1}{\partial \beta}},$$

on a

$$\frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial^2 \log \lambda_1}{\partial \alpha\, \partial \beta} = k^2\left(\frac{py_1 - pw_1}{p_1^2}\right)^2 - k^2(px_1 - pw_1)^2,$$

et les deux formes quadratiques

$$ds^2 = 2\lambda_1\, d\alpha\, d\beta,$$
$$k(py_1 - pw_1)(d\alpha^2 + d\beta^2) + 2\lambda_1 k(px_1 - pw_1)\, d\alpha + d\beta$$

définissent une nouvelle surface isothermique. Remarquons que

$$x = x_1 + \omega,$$
$$y = y_1,$$

d'où

$$b_1 = b, \qquad a = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{a_1 - e_1},$$

$$\lambda = -\lambda \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{(a_1 - e_1)^2} = -\frac{\lambda(a - e_1)^2}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}.$$

Si l'on procède de même avec les trois demi-périodes, on obtient ainsi quatre surfaces isothermiques ; en prenant les surfaces qui leur correspondent par la transformation de Bour et Christoffel, on obtiendra quatre autres surfaces (on peut aussi les obtenir en ajoutant les demi-périodes à y). Les huit surfaces ainsi obtenues sont les surfaces de M. Darboux.