BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. HALPHEN

Sur les potentiels des accélérations de divers ordres

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 169-175

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__169_1>

SUR LES POTENTIELS DES ACCÉLÉRATIONS DE DIVERS ORDRES;

PAR M. CH. HALPHEN.

Soient, par rapport à trois axes rectangulaires, x, y, z, les coordonnées d'un point en mouvement dans un champ de forces. Si la vitesse de ce point dérive d'un potentiel $V(x, y, z)$, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial V}{\partial z},$$

l'accélération du point mobile dérive aussi d'un potentiel, c'est-à-dire qu'il y a une fonction de forces, ainsi que l'a fait remarquer M. Darboux. On a, en effet,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\Delta V\right), \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\Delta V\right), \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\Delta V\right),$$

où ΔV est le paramètre différentiel *du premier ordre*

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

Mais, en général, les accélérations seconde, troisième, etc., ne dérivent pas de potentiels. M. Darboux avait proposé de chercher les cas où ces accélérations de divers ordres dérivent de potentiels. Dans les pages suivantes, on trouvera des conclusions relatives à l'ordre des équations auxquelles doit satisfaire la fonction V pour que cela ait lieu, et un exemple de mouvement où toutes les accélérations successives dérivent de potentiels.

I. *Mouvements dans le plan.* — Dans le cas des mouvements plans, nous n'avons que deux coordonnées rectangulaires, x, y, et les composantes de l'accélération seconde sont

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^3x}{dt^3} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta V + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Delta V\right),\\
\frac{d^3y}{dt^3} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Delta V + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta V\right).
\end{aligned}
\right.
$$

L'accélération seconde ne dérivera d'un potentiel que si la condition d'intégrabilité

$$
(2)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)
$$

est satisfaite ; et, s'il en est ainsi, on obtiendra ce potentiel P par l'intégration de l'équation aux différentielles totales

$$
dP = \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)dx + \left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)dy.
$$

Pour abréger, nous appellerons *équation* (A_2) la condition (2) pour que l'accélération seconde dérive d'un potentiel. En développant, on voit facilement qu'elle s'écrit

$$
(A_2)\qquad \delta\,\Delta V\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \delta V\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Delta V,
$$

où l'on pose

$$
\delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.
$$

C'est une équation aux dérivées partielles, du troisième ordre en V, symétrique en V et ΔV, et par conséquent, satisfaite dans le cas particulier où $V = \Delta V$ [1].

Si l'on cherche de même l'équation (A_3), condition pour que l'accélération troisième dérive d'un potentiel, on trouve une équation du quatrième ordre, déjà assez longue. D'une façon générale, en raison de la symétrie dans les calculs, qui fait disparaître les dérivées d'ordre supérieur, *l'équation* (A_n) *est d'ordre* $(n+1)$. Elle sera, bien entendu, vérifiée si $\Delta V = V$, mais, déjà pour (A_3), cela n'apparaît pas de façon aussi évidente que pour (A_2).

---

[1] Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, octobre 1910.

Il faut remarquer qu'en écrivant ainsi l'équation (A_n), on ne suppose absolument rien sur les accélérations précédentes, d'ordres $(n-1)$, $(n-2)$, ...

Nous allons, maintenant, nous placer précisément dans le cas contraire.

Commençons par supposer que l'accélération seconde dérive d'un potentiel, c'est-à-dire que V satisfait à (A_2). Si l'on différentie par rapport à x, puis par rapport à y, l'équation (A_2) ; si l'on multiplie les nouvelles équations obtenues respectivement par $-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\frac{\partial V}{\partial y}$, et si on les ajoute ensuite à (A_3), membre à membre, *les termes du quatrième ordre disparaissent.* Toutes réductions faites, on obtient l'équation suivante

$$(A'_3) \qquad \delta\, \Delta V \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}\right)' = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \Delta V (\delta V)',$$

où l'accent représente l'opération

$$(\ldots)' = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y},$$

qui est, en somme, une dérivation par rapport à t.

Ainsi donc, l'existence de (A_2) permet de remplacer (A_3) par une équation équivalente (A'_3) du troisième ordre seulement. Des calculs analogues, mais assez longs, montrent de même que l'existence de (A_3) permet de remplacer (A_4) par une équation (A'_4) du quatrième ordre seulement, et ainsi de suite : l'équation (A_n), d'ordre $(n+1)$, se ramène à une équation d'ordre n par combinaison avec (A_{n-1}). On a donc ce théorème :

L'ordre $(n+1)$ de la condition pour que l'accélération $n^{ième}$ dérive d'un potentiel, se réduit d'une unité si l'accélération $(n-1)^{ième}$ dérive déjà d'un potentiel.

On serait tenté de croire par suite que (A_n) peut se réduire à l'ordre $(n-1)$ par combinaison avec (A_{n-1}) et (A_{n-2}) ; de sorte qu'en écrivant successivement les conditions (A_2), (A_3), ..., (A_n), convenablement combinées entre elles, on n'aurait que des équations du troisième ordre. Il n'en est rien ; si l'on peut faire disparaître les termes d'ordre $(n+1)$ de (A_n), on ne peut aller plus loin ; et toutes ces équations, à partir de (A_4), restent très compliquées; les écrire ne pourrait pas servir à grand'chose.

Reprenons l'équation (A'_3), qui ne vaut que lorsque (A_2) est satisfaite. Si on la divise, membre à membre, par (A_2), elle prend la forme symétrique

$$(A''_3) \qquad \delta V \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}\right)' = \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}(\delta V)',$$

d'où se dégage un cas particulier du problème : cette équation est évidemment satisfaite si

$$(3) \qquad \delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}.$$

Mais il ne suffit pas que V satisfasse à l'équation du second ordre (3) ; il faut aussi que V satisfasse à (A_2). Or, en tenant compte de (3), (A_2) se réduit à

$$\delta\, \Delta V = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \Delta V;$$

V et ΔV doivent donc satisfaire à (3).

Remarquons que si V est intégrale de l'équation linéaire (3), il en est de même de $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$; mais il n'en est pas ainsi, en général, de leurs carrés. Soit u une intégrale de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y};$$

on voit immédiatement, en substituant, que $\varphi(u)$ est aussi une intégrale, quelle que soit la fonction φ, si l'on a

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Les carrés de $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ satisferont donc à (3), si ces fonctions satisfont elles-mêmes à (4), c'est-à-dire si l'on a

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y},$$

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

Or, de (5) et (6) on déduit par addition l'équation (3), pourvu toutefois que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\neq 0.$$

Par suite, si une fonction $V(x,y)$, *non harmonique*, satisfaisant à (5) et (6), est prise pour potentiel de vitesse, les accélérations seconde et troisième dériveront aussi de potentiels. Ce cas particulier est donc solutionné par la recherche d'intégrales communes à deux équations du second ordre.

Si la fonction V était harmonique, il faudrait considérer le système formé par (3), (5), (6) et l'équation de Laplace; on en déduit immédiatement

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}=0,$$

d'où

$$V=ax+by+c,$$

a, b, c, étant des constantes: c'est le mouvement *rectiligne et uniforme*.

II. *Mouvements dans l'espace.* — *Exemple.* — Le problème dans l'espace est plus compliqué que dans le plan, parce que les conditions d'intégrabilité, au lieu d'être constituées par des équations uniques (A_n), sont formées de systèmes (α_n) de trois équations aux dérivées partielles simultanées. Si l'on pose

$$\delta_{\lambda,\mu}=\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}-\frac{\partial^2}{\partial\mu^2},$$

le système (α_2) des conditions exprimant que l'accélération seconde dérive d'un potentiel, s'écrit

$$(\alpha_2)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\delta_{x,y}\Delta V+\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\Delta V=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Delta V\,\delta_{x,y}V+\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\Delta V\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z},\\&\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\delta_{y,z}\Delta V+\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Delta V=\ldots,\\&\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\delta_{z,x}\Delta V+\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\Delta V=\ldots.\end{aligned}\right.$$

Il est du troisième ordre, et les équations sont symétriques en V et ΔV.

D'une façon générale, (α_n) est formé de trois équations d'ordre $(n+1)$.

Comme dans le cas des mouvements plans, *l'ordre* $(n+1)$ *du système* (α_n) *se réduit d'une unité par combinaison avec les équations de* (α_{n-1}).

Par exemple, si l'on différentie successivement par rapport à x, y, z la première des équations (α_2) ; qu'on multiplie respectivement par $-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}$ les nouvelles équations obtenues, et qu'on les ajoute ensuite, membre à membre, à la première équation (α_3), on trouve l'équation suivante du troisième ordre

$$\begin{aligned} &\delta_{x,y}\,\Delta V\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)'\right] \\ &\quad+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\,\Delta V\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\,\delta_{z,x}V+\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right)'\right] \\ &=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,\Delta V\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right)^2-(\delta_{x,y}V)'\right] \\ &\quad+\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\,\Delta V\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\,\delta_{z,y}V+\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\right)'\right], \end{aligned}$$

où

$$(\ldots)'=\frac{\partial V}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

On voit que cette équation est déjà très compliquée.

Indiquons, maintenant, un exemple de mouvement où toutes les accélérations successives dérivent de potentiels. Soit

$$V=f(x)+\varphi(y)+\psi(z),$$

où f, φ, ψ, sont trois fonctions indéfiniment dérivables. Il est visible que les composantes de la vitesse et de toutes les accélérations sont respectivement des fonctions de x, y et z ; l'accélération $n^{\text{ième}}$ dérive donc d'un potentiel qui est de même forme que V, $F_n(x)+\Phi_n(y)+\Psi_n(z)$.

En particulier, on peut prendre pour V une forme quadratique, car, en faisant tourner les axes de façon à les amener sur les axes principaux de la quadrique $V=\text{const.}$, le potentiel prend la forme ci-dessus. Dans le plan, par exemple, si l'on prend

$$V=a(x^2+y^2)+2bxy,$$

on trouve, par une intégration élémentaire, l'équation de la trajectoire

$$\frac{K}{x^b} = \left(\frac{y}{x} - 1\right)^{\frac{b+a}{2}} \left(\frac{y}{x} + 1\right)^{\frac{b-a}{}}.$$

Si l'on suppose que $a = 0$, on aboutit à un cas curieux. On sait qu'un point repoussé par un centre fixe proportionnellement à la distance décrit une hyperbole. *Si la vitesse initiale donnée au point est telle que cette hyperbole soit équilatère, toutes les accélérations successives dérivent de potentiels.*

On a, en effet, dans ce cas

$$\begin{aligned}
V &= 2bxy, \\
P_1 &= \frac{1}{2}\Delta V = 2b^2(x^2+y^2), \\
P_2 &= 8b^3xy, \\
P_3 &= 8b^4(x^2+y^2), \\
P_4 &= 32b^5xy, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

les potentiels se reproduisent périodiquement de deux en deux, multipliés chaque fois par $4b^2$. La forme même de P_1 montre que la force émane de l'origine et est répulsive, proportionnelle à la distance; et, des formules de la vitesse, on déduit immédiatement que la trajectoire est l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 =$ const.