BULLETIN DE LA S. M. F.

E. COTTON

Remarques sur l'application du principe des forces vives aux machines mobiles

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

REMARQUES SUR L'APPLICATION DU PRINCIPE DES FORCES VIVES AUX MACHINES MOBILES;

PAR M. ÉMILE COTTON.

Dans l'application du principe des forces vives à certaines machines mobiles, on s'est contenté parfois de notions intuitives dont l'accord avec les principes de la Mécanique rationnelle n'apparaît cependant pas immédiatement.

Par exemple, s'il s'agit du mouvement d'une bicyclette et de son cavalier (¹), on ne peut calculer le travail des forces intérieures au cycliste, dans l'ignorance où l'on est de la distribution de ces forces; on prend alors comme travail moteur celui qui correspond aux pressions des pieds sur les pédales.

D'autre part, on calcule ce travail en considérant le déplacement des pédales par rapport au cadre de la bicyclette et non pas par rapport au sol. Cette façon d'évaluer le travail est encore licite pour les frottements intérieurs, mais serait manifestement absurde pour la résistance de l'air ou les réactions du sol.

Les pages suivantes ont pour but de montrer comment on peut éliminer d'une façon rigoureuse et générale le travail des forces intérieures au moteur dans l'application du principe des forces vives aux machines mobiles (²); il ne reste dans l'équation finale que des forces plus accessibles à l'expérience. Elles permettent

(¹) *Voir* BOURLET, *Bicycles et bicyclettes*, t. II, p. 73 à 88.

(²) *Voir* à ce sujet l'article de M. LECORNU, *Sur la Dynamique des corps déformables* (ce *Bulletin*, t. XXIX, 1901, p. 176 à 190).

Voir aussi, dans l'Ouvrage *L'Aviation* de MM. Painlevé et Borel, le raisonnement donnant l'équation du mouvement d'une automobile (p. 181 à 183). Ce raisonnement suppose la marche rectiligne; nous traitons ici le cas d'un mouvement quelconque.

d'abord d'estimer ainsi les approximations que comporte la méthode intuitive précédemment indiquée ; d'autre part, elles donnent un nouvel exemple de l'intérêt qu'il y a, au point de vue des applications, à donner un énoncé géométrique aux principes de la Mécanique rationnelle.

1. Pour la commodité de l'exposition, nous ferons usage de la notion de puissance de préférence à celle de travail (1).

Nous supposerons connues les explications que nous avons données à ce sujet dans un article antérieur *Sur la notion de puissance en Mécanique* (2).

La démonstration d'un résultat concernant la puissance des forces intérieures donnée dans cet article (3) (p. 227) conduit à la proposition un peu plus générale que voici :

I. *Dans le calcul de la puissance d'un système de forces géométriquement équivalent à zéro, c'est-à-dire à résultante de translation nulle et à moment résultant (par rapport à un point) nul, le choix du système de comparaison par rapport auquel on prend les vitesses des points d'application des diverses forces est indifférent.* On pourrait, bien entendu, substituer les mots *travail élémentaire* au mot *puissance*, à condition de parler de déplacement infiniment petit au lieu de vitesse.

Cette proposition importante (4) est d'un emploi fréquent.

Par exemple, le calcul de la perte de puissance par frottement d'un coussinet ou d'un pivot pourra toujours se faire en prenant le produit de la vitesse angulaire de rotation de l'arbre par rapport à ses appuis par le moment du système des réactions par rapport à l'axe du coussinet ou du pivot, et cela que les appuis soient fixes ou mobiles par rapport au sol.

---

(1) La première fait intervenir les vitesses des points d'application des forces au lieu des déplacements comme fait la seconde ; et les règles relatives au changement du système de comparaison, bien connues en ce qui concerne les vitesses, demanderaient des explications assez longues pour les déplacements.

(2) *L'Enseignement mathématique*, 15 mai 1910. Les renvois à cet article seront désignés par les lettres *E. M.*

(3) On notera que cette démonstration s'applique aussi bien aux forces de contact deux à deux égales et *directement* opposées qu'aux actions à distance. C'est à ces dernières seules que s'applique le raisonnement classique (APPELL, *Mécanique rationnelle*, t. II, p. 57 de la 2e édition).

(4) M. Lecornu en a signalé l'intérêt (*voir* sa *Dynamique appliquée*).

Plus généralement, la perte d'énergie mécanique par frottement entre deux pièces solides en contact est la même — pour un même état des forces de contact (1) — quel que soit le mouvement des pièces par rapport au sol; elle ne fait intervenir que le déplacement de l'une des pièces par rapport à l'autre.

2. Considérons maintenant une machine mobile (bicyclette, automobile, aéroplane, etc.). L'épithète *absolu* se rapportera mutuellement aux mouvements par rapport au sol et aux éléments mécaniques [vitesses, accélérations, puissances (2), forces d'inertie] correspondants. Nous appellerons *relatifs* les mouvements par rapport à un système invariable Π et les éléments correspondants. En pratique, Π sera la pièce rigide la plus importante de la machine (cadre de la bicyclette, carrosserie de l'automobile, etc.). Le mouvement d'*entraînement* sera celui de Π par rapport au sol.

Nous distinguerons deux parties P, P′ dans la machine. La pièce Π appartiendra à la partie P′. Les forces intérieures à P′ seront en pratique toutes résistantes, leur puissance sera négative ou nulle; au contraire, parmi les forces intérieures à la partie P que nous appellerons *le moteur*, figureront les forces motrices. Cette hypothèse n'est cependant pas utilisée dans la théorie suivante.

Nous admettrons que les forces correspondant aux actions mutuelles de P et de P′ sont des forces de contact, deux à deux égales et directement opposées.

Nous classerons les forces ordinaires (3) agissant sur la machine de la façon suivante :

1° forces intérieures à P................	F_{iP}	forces intérieures à la machine
2° forces intérieures à P′................	$F_{iP'}$	
3° actions exercées par P′ sur P........	$F_{P'P}$	
4° actions exercées par P sur P′.........	$F_{PP'}$	
5° forces extérieures à la machine agissant sur P......	F_{eP}	
6° forces extérieures à la machine agissant sur P′......	$F_{eP'}$	

(1) L'indifférence du système de comparaison sur le calcul des pertes de puissance ou d'énergie n'est exacte qu'en ce qui concerne les vitesses (ou les déplacements); car une modification du mouvement d'entraînement peut entraîner une modification des forces centrifuges et, pour un même état des forces données, une modification des forces de liaison s'exerçant au contact des deux solides.

(2) *Voir* le n° 4 de l'article *E. M.*

(3) Nous opposons les forces *ordinaires* et les forces *d'inertie*.

3. *Appliquons le théorème des forces vives au mouvement absolu de la machine*. La somme des puissances absolues des forces ordinaires est égale à la demi-dérivée par rapport au temps de la force vive absolue. Nous désignerons par $\mathfrak{P}_a(\Phi)$ la puissance absolue d'un ensemble de forces Φ, par $\mathfrak{P}_r(\Phi)$ et $\mathfrak{P}_e(\Phi)$ la puissance relative et la puissance d'entraînement du même ensemble. D'autre part, on sait (*E. M.*, p. 225) que la demi-dérivée précédente changée de signe est égale à la puissance absolue des forces absolues d'inertie de la machine. Désignons l'ensemble des forces d'inertie absolue correspondant à P par $\mathfrak{J}_{aP}$ et celles correspondant à P′ par $\mathfrak{J}_{aP'}$; l'équation traduisant le théorème des forces vives peut alors s'écrire

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{P}_a(\mathfrak{J}_{aP}) + \mathfrak{P}_a(\mathfrak{J}_{aP'}) + \mathfrak{P}_a(F_{iP}) + \mathfrak{P}_a(F_{iP'}) \\ &+ \mathfrak{P}_a(F_{P'P}) + \mathfrak{P}_a(F_{PP'}) + \mathfrak{P}_a(F_{eP}) + \mathfrak{P}_a(F_{eP'}) = 0. \end{aligned}$$

4. Il y a intérêt à *éliminer la puissance des forces intérieures au moteur* P, lorsque, comme il arrive souvent, il est difficile de les connaître même d'une façon approchée. Dans le cas du cycliste, par exemple, il ne saurait être question de les analyser.

Pour faire cette élimination, nous appliquerons au moteur P un théorème analogue à celui des forces vives (*E. M.*, p. 228), en écrivant que la puissance relative de l'ensemble des forces agissant sur P (tant forces absolues d'inertie que forces ordinaires) est nulle. Nous avons ainsi l'équation

$$(2)\qquad \mathfrak{P}_r(\mathfrak{J}_{aP}) + \mathfrak{P}_r(F_{iP}) + \mathfrak{P}_r(F_{P'P}) + \mathfrak{P}_r(F_{eP}) = 0.$$

Retranchons cette équation de la précédente (1). D'après la proposition du n° 1, les puissances relative et absolue de l'ensemble F_{iP} des forces intérieures à P sont égales entre elles. Cet ensemble de forces disparaît donc bien de l'équation restante.

Rappelons d'ailleurs que l'excès de la puissance absolue d'un ensemble de forces sur la puissance relative est égale à la puissance d'entraînement (*E. M.*, p. 227). L'équation obtenue peut alors s'écrire

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{P}_e(\mathfrak{J}_{aP}) + \mathfrak{P}_e(F_{P'P}) + \mathfrak{P}_e(F_{eP}) \\ &+ \mathfrak{P}_a(\mathfrak{J}_{aP'}) + \mathfrak{P}_a(F_{iP'}) + \mathfrak{P}_a(F_{PP'}) + \mathfrak{P}_a(F_{eP'}) = 0. \end{aligned}$$

Les forces appartenant aux ensembles $F_{P'P}$ et $F_{PP'}$ forment un système géométriquement équivalent à zéro, la somme de leurs puissances d'entraînement est nulle (*E. M.*, p. 227); l'équation (3) prend alors la forme suivante :

$$(4)\quad \mathfrak{P}_e(\mathfrak{J}_{a\mathrm{P}}) + \mathfrak{P}_a(\mathfrak{J}_{a\mathrm{P}'}) + \mathfrak{P}_r(\mathrm{F}_{\mathrm{PP}'}) + \mathfrak{P}_e(\mathrm{F}_{e\mathrm{P}}) + \mathfrak{P}_a(\mathrm{F}_{i\mathrm{P}'}) + \mathfrak{P}_a(\mathrm{F}_{e\mathrm{P}'}) = 0.$$

C'est l'équation que nous voulions obtenir.

5. Voici maintenant quelques remarques au sujet de cette équation et de ses applications pratiques.

La puissance d'entraînement d'un ensemble de forces Φ s'obtient comme on sait (*E. M.*, p. 227) en prenant le moment du dyname Φ et du torseur des rotations instantanées donnant la distribution des vitesses d'entraînement. Il suffit donc, pour le calcul de cette puissance, de connaître Φ par ses coordonnées pluckériennes relativement à des axes quelconques, ou encore sa résultante de translation et son moment résultant (par rapport à un point quelconque).

Dans le cas des *forces absolues d'inertie*, d'un système matériel P, un calcul élémentaire [1] montre que la *résultante de la translation* est équipollente à la force absolue d'inertie d'un point matériel fictif placé au centre de gravité de P de masse égale à la masse totale de P.

Quant au *moment résultant* $O\sigma$ *de ces forces par rapport à un point fixe* O, on voit de même qu'il est opposé à un vecteur d'origine O équipollent à la vitesse de l'extrémité S du vecteur OS moment résultant par rapport à O des quantités de mouvement de P.

Une règle tout aussi simple s'applique au calcul du *moment résultant des mêmes forces par rapport au centre de gravité* G du système matériel P. On détermine le moment résultant GS′, par rapport à G, des quantités de mouvement qui correspondent au mouvement du système par rapport à des axes de directions fixes passant par G; on prend la vitesse $\overline{S'V}$ du point S′, par rapport aux mêmes axes, et l'on mène le vecteur $\overline{G\sigma'}$ équipollent au

(1) Les calculs indiqués ici sont au fond ceux qu'on fait au début de la Dynamique des systèmes pour l'établissement des théorèmes généraux (*voir* par exemple le *Traité de Mécanique* de M. Appell, t. II).

vecteur $\overline{VS'}$ opposé à $\overline{S'V}$; on a ainsi le moment résultant cherché.

Nous voyons ainsi ce qu'il suffira de connaître pour déterminer exactement $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{J}_{aP})$; mais dans nombre de cas on pourra se contenter d'une détermination approchée.

Par exemple, si les mouvements de P par rapport à P′ sont lents, les vitesses relatives étant faibles, la puissance relative $\mathfrak{P}_r(\mathfrak{J}_{aP})$ sera négligeable et l'on pourra au lieu de $\mathfrak{P}_e(\mathfrak{J}_{aP})$ écrire $\mathfrak{P}_a(\mathfrak{J}_{aP})$; cette dernière puissance est, comme on sait, égale à la demi-dérivée de la force vive de P changée de signe.

Il arrivera souvent d'ailleurs que les deux termes de l'équation (4) se rapportant aux forces d'inertie seront négligeables ; c'est par exemple ce qui arrive lorsque l'approximation précédente étant permise, la force vive de la machine varie lentement [1].

Lorsqu'il en est ainsi, on peut écrire l'équation approchée suivante, qui sera dite l'*équation de la marche uniforme :*

$$\mathfrak{P}_r(F_{PP'}) + \mathfrak{P}_e(F_{eP}) + \mathfrak{P}_a(F_{iP'}) + \mathfrak{P}_a(F_{eP'}) = 0.$$

Dans le cas des machines fixes (le mouvement d'entraînement se réduisant au repos), cette équation est celle donnée par le principe des vitesses virtuelles.

On peut transformer l'équation en prenant les valeurs moyennes de ses différents termes pendant un intervalle de temps t_0T ; l'équation obtenue conserve la même forme que l'équation (4), mais les puissances sont alors des puissances moyennes et non plus des puissances instantanées. Dans l'équation aux puissances moyennes ainsi obtenues, la disparition des termes correspondant aux forces d'inertie se présentera fréquemment ; tel serait le cas d'une marche normale de la machine, où vitesses et accélérations reprendraient périodiquement les mêmes valeurs et les mêmes inclinaisons mutuelles et où l'on appliquerait l'équation en question à un cycle.

6. Pour donner un exemple concret, appliquons ceci au mouvement d'une bicyclette et de son cavalier, et plaçons-nous dans

---

[1] Remarquons aussi que si l'une des parties P, P′ a une masse très faible par rapport à l'autre, les vitesses et les accélérations étant de grandeur ordinaire, le terme correspondant de l'équation (4) est négligeable.

l'hypothèse d'une vitesse sensiblement constante où l'équation de la marche uniforme sera manifestement applicable.

Prenons comme partie P le cycliste lui-même ; comme pièce Π le cadre. Les forces $F_{PP'}$ sont les actions de contact exercées par le cycliste sur les pédales, le guidon et la selle. Comme dans l'équation (5), c'est leur puissance relative qui intervient seule, et comme les points du cycliste en contact avec la selle sont très sensiblement immobiles par rapport au cadre, les actions qui s'exercent sur la selle sont négligeables dans l'équation (5). Il en est de même, mais à un moindre degré, des actions qui s'exercent sur le guidon. Il ne reste, en définitive, que les pressions sur les pédales, dont la puissance se calcule bien, comme il a été dit au début, en prenant le mouvement des pédales par rapport au cadre.

Quant aux forces extérieures F_{eP} elles se réduisent à la résistance de l'air et au poids. Un peu de réflexion suffit pour s'assurer que la puissance d'entraînement correspondante ne diffère guère de la puissance absolue.

Les forces $F_{eP'}$ comprennent les poids des diverses parties de la bicyclette, les résistances de l'air s'exerçant sur ces parties et de plus les actions du sol. La puissance correspondante à ces dernières actions est à peu près celles qui correspond au roulement dans un plan d'une circonférence sur une droite fixe; elle serait aisée à calculer connaissant la pression normale, le coefficient de frottement de roulement et la vitesse du centre de la circonférence.

Au sujet des forces $F_{iP'}$ qui sont ici les frottements intérieurs, nous avons déjà fait observer que le calcul de la puissance correspondante pouvait être fait en faisant intervenir seulement les vitesses relatives des pièces en contact.

On peut varier les applications des équations (4) ou (5). Choisissons autrement les parties P et P′. Prenons par exemple pour P l'ensemble formé par le cycliste, les pédales, les manivelles et une partie de la chaîne en contact avec la roue du pédalier. Comparons l'équation obtenue à la précédente (et négligeons la puissance des frottements dus aux parties ainsi ajoutées), nous aurons la différence des tensions des deux brins de la chaîne en fonction des pressions exercées par les pieds sur les pédales. On pourrait multiplier les exemples de cette nature; leur intérêt est manifeste au point de vue pratique, puisque les dimensions à donner aux pièces d'une machine dépendent des efforts auxquels elles ont à résister.

7. Terminons ces remarques en comparant le mouvement de la bicyclette et de son cavalier à celui d'une voiture traînée par un cheval. Appliquons l'équation (5) de la marche uniforme à ce dernier système, en prenant comme partie P le système matériel formé par le cheval et les brancards de la voiture, et comme pièce Π la caisse de la voiture. Dans le cas actuel, la puissance relative des forces $F_{PP'}$ est nulle puisque ces forces s'exercent en des points invariablement fixés au système Π. Par contre, dans l'ensemble F_{eP} figurent maintenant des forces que nous n'avions pas à considérer dans le cas du cycliste; nous voulons parler des actions exercées par le sol sur les pieds du cheval. Ces actions ont une puissance absolue sensiblement nulle, comme la vitesse des points de contact, le glissement des pieds sur le sol étant manifestement négligeable en général. Au contraire leur puissance d'entraînement, où figurent les vitesses d'entraînement des mêmes points (vitesses équipollentes à la vitesse de translation de la caisse de la voiture) est différente de zéro.

Les indications précédentes suffisent, ce nous semble, à montrer l'intérêt des équations (4) ou (5); le lecteur imaginera aisément des applications variées des mêmes équations.