BULLETIN DE LA S. M. F.

G. RÉMOUNDOS

# Sur le module maximum des fonctions algébroïdes

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 39 (1911), p. 304-309
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__304_1>

## SUR LE MODULE MAXIMUM DES FONCTIONS ALGÉBROÏDES;

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.

**1.** Désignons par $u = \varphi(z)$ une fonction algébroïde à $n$ branches déterminée par l'équation

$$(1) \qquad u^n + A_1(z)u^{n-1} + A_2(z)u^{n-2} + \ldots + A_{n-1}(z)u + A_n(z) = 0,$$

les $A_1(z)$, $A_2(z)$, ... désignant des fonctions entières, et soit $M(r)$ le plus grand des modules maximums des coefficients $A_i(z)$ sur la circonférence de rayon $r = |z|$. Dans la théorie de la croissance et des zéros des fonctions algébroïdes, il est intéressant d'avoir des relations très précises [1] entre $M(r)$ et le module maximum

---

[1] Dans mon Mémoire *Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches* (*Journal de Mathématiques*, 1906, fasc. I), j'ai traité un problème analogue, mais sans chercher des relations *d'extrême précision* entre $m(r)$ et $M(r)$, qui n'étaient pas nécessaires au but que je m'étais alors assigné. Les résultats que je me propose de faire connaître ici complètent ainsi ceux que j'avais exposés dans mon Mémoire ci-dessus cité.

$m(r)$ de la fonction algébroïde correspondante $u = \varphi(z)$ : la quantité $m(r)$ est évidemment égale au plus grand des modules maximums des diverses branches $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de l'algébroïde $u = \varphi(z)$. La recherche de telles relations est l'objet de cette Note.

2. *Limite inférieure de $m(r)$.* — A cet effet, nous utiliserons les formules bien connues :

$$(2) \qquad \sum u_1 u_2 \ldots u_\nu = (-1)^\nu A_\nu(z) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

le premier membre désignant la somme de toutes les combinaisons (produits) des $n$ branches prises $\nu$ à $\nu$. Le module de chaque terme de la somme $\sum$ ne dépasse pas évidemment la quantité $[m(r)]^\nu$, et, par conséquent, ce module de la somme $\sum u_1, u_2, \ldots, u_n$ ne dépasse pas la quantité $C_{n,\nu}[m(r)]^\nu$, où le symbole $C_{n,\nu}$ désigne le nombre des combinaisons de $n$ objets pris $\nu$ à $\nu$. On en déduit la formule suivante :

$$(3) \qquad M_\nu(r) \leqq C_{n,\nu}[m(r)]^\nu,$$

en représentant par $M_\nu(r)$ le module maximum de la fonction entière $A_\nu(z)$, ou bien

$$(4) \qquad M(r) \leqq C_{n,\bar{\nu}}[m(r)]^{\bar{\nu}},$$

l'indice $\bar{\nu}$ étant déterminé par l'égalité

$$(5) \qquad M_{\bar{\nu}}(r) = M(r),$$

et pouvant varier avec $r$. En effet, d'une part, l'égalité

$$M_\nu(r) = M(r)$$

est satisfaite pour au moins une valeur $\nu = \bar{\nu}$ de $\nu$, d'après la définition de la fonction $M(r)$, l'entier $\bar{\nu}$ dépendant de $r$ ; d'autre part, étant donnée une valeur de $r$, la formule (3) est satisfaite pour toutes les valeurs de $\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Nous remarquons maintenant que la formule (4) entraîne la suivante :

$$(6) \qquad M(r) \leqq K[m(r)]^n,$$

où K désigne le plus grand des nombres $C_{n,1}$, $C_{n,2}$, ..., $C_{n,n}$ ; on en déduit la formule

$$m(r) \geqq \frac{1}{K^{\frac{1}{n}}} M(r)^{\frac{1}{n}}, \tag{7}$$

qui nous détermine une limite inférieure de $m(r)$ valable pour chaque valeur de $\nu$.

3. *Limite supérieure de* $m(r)$. — Supposons maintenant que l'on ait l'inégalité

$$m(r) > (1+\varepsilon) M(r), \tag{8}$$

pour des valeurs suffisamment grandes de $r$, $\varepsilon$ étant un nombre positif fixe aussi petit que l'on voudra; alors, il y aura des points $z = \bar{z}$ de rayon $r$ suffisamment grand satisfaisant à l'inégalité

$$|u| > (1+\varepsilon) M(r); \tag{9}$$

cette hypothèse sera démontrée absurde, moyennant l'équation (1), que nous écrivons sous la forme

$$u^n\left(1 + \frac{A_1}{u} + \frac{A_2}{u^2} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{u^{n-1}} + \frac{A_n}{u^n}\right) = u^n(1+\omega) = 0,$$

en posant

$$\omega = \frac{A_1}{u} + \frac{A_2}{u^2} + \ldots + \frac{A_n}{u^n}.$$

Nous avons, en effet, pour tout point $z$, les formules

$$|A_1| \leqq M(r), \qquad |A_2| \leqq M(r), \qquad \ldots, \qquad |A_n| \leqq M(r),$$

et pour les points $\bar{z}$ l'inégalité

$$|u| > (1+\varepsilon) M(r).$$

On en déduit les formules

$$\left|\frac{A_1}{u}\right| < \frac{1}{1+\varepsilon}, \qquad \left|\frac{A_2}{u^2}\right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^2 M}, \qquad \left|\frac{A_3}{u^3}\right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^3 M^2}, \qquad \ldots,$$

$$\left|\frac{A_n}{u^n}\right| < \frac{1}{(1+\varepsilon)^n M^{n-1}},$$

$$|\omega| < \frac{1}{1+\varepsilon}\left[1 + \frac{1}{(1+\varepsilon)M} + \frac{1}{(1+\varepsilon)^2 M^2} + \ldots + \frac{1}{(1+\varepsilon)^{n-1} M^{n-1}}\right], \tag{10}$$

satisfaites pour tous les points $\bar{z}$. Or, nous savons que, lorsque le $|\bar{z}| = \bar{r}$ croît indéfiniment, le module maximum $M(\bar{r})$ tend vers l'infini et, par conséquent, le second membre de l'inégalité (10) tend vers $\frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Il y aura donc des points $\bar{z}$ de rayon suffisamment grand pour lesquels le module de $\omega$ soit plus petit que l'unité; dès lors, pour ces points, il est impossible que la fonction algébroïde $u = \varphi(z)$ satisfasse à l'équation (8) qui la détermine, parce que pour les mêmes points la quantité $1 + \omega$ ne saurait être nulle.

Il est donc démontré par la réduction à l'absurde que l'inégalité (8) ne saurait être satisfaite pour des valeurs de $r$ suffisamment grandes; nous en concluons que l'inégalité

$$m(r) < (1+\varepsilon) M(r) \tag{11}$$

est satisfaite *constamment à partir d'une valeur de r*, le nombre positif et fixe $\varepsilon$ étant aussi petit que l'on voudra.

4. *Régularisation asymptotique de m(r).* — Nous remarquons d'abord que la limite inférieure

$$\frac{1}{K^{\frac{1}{n}}} M(r)^{\frac{1}{n}}$$

peut être remplacée par la quantité

$$\frac{1}{(C_{n,\bar{\nu}})^{\frac{1}{\bar{\nu}}}} [M(r)]^{\frac{1}{\bar{\nu}}},$$

qui donne une limitation d'une extrême précision; il y a, en effet, des cas où $m(r)$ atteint justement cette limite inférieure

$$\frac{1}{(C_{n,\bar{\nu}})^{\frac{1}{\bar{\nu}}}} [M(r)]^{\frac{1}{\bar{\nu}}};$$

cela arrive, par exemple, dans le cas où l'algébroïde $u = \varphi(z)$ est déterminée par une équation binome

$$u^n + A_n(z) = 0,$$

parce que, dans ce cas, nous avons

$$\bar{\nu} = n, \qquad C_{n,\bar{\nu}} = C_{n,n} = 1;$$

par conséquent le module maximum $m(r)$, qui est évidemment égal à $[M(r)]^{\frac{1}{n}}$, atteint la limite inférieure ci-dessus indiquée.

La limitation de $m(r)$, établie dans ce travail, nous permet évidemment de ramener avec une grande précision l'étude asymptotique du module maximum des fonctions algébroïdes multiformes à celle du module maximum des algébroïdes uniformes (fonctions entières), qui a été faite par plusieurs auteurs.

On sait que l'étude de la croissance du module maximum des fonctions entières se fait par la comparaison avec une autre fonction $R(r, r)$ ayant une certaine régularité et prise comme terme de comparaison. Dans le cas où les coefficients $A_i(z)$ sont tous d'ordre *fini*, nous aurons certainement

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} < M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

en désignant par $\rho$ le plus grand des ordres des coefficients $A_i(z)$. On en déduit

$$e^{r^{\rho-\varepsilon_1}} < m(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon_1}},$$

en vertu des formules (7) et (11), l'inégalité à droite étant satisfaite à partir d'une valeur de $r$ et l'inégalité à gauche pour des valeurs de $r$ infiniment grandes ; le nombre positif $\varepsilon_1$ est arbitrairement petit.

Dans le cas où les coefficients $A_i(z)$ ne sont pas tous d'ordre finis, il faut utiliser les *fonctions-types* introduites dans la science par M. Blumenthal (*Principes sur la théorie des fonctions entières d'ordre infini;* Paris, Gauthier-Villars, 1911). Soient $\mu_1(r)$, $\mu_2(r)$, $\mu_3(r)$, ... des ordres des coefficients $A_i(z)$ qui sont d'ordre infini, et désignons par $\mu(r)$ la fonction de $r$ qui est égale, pour chaque valeur de $r$, au plus grand des nombres $\mu_1(r)$, $\mu_2(r)$, $\mu_3(r)$, ... ; nous aurons évidemment

$$e^{r^{\mu(r)^{1-\varepsilon}}} < M(r) \leq e^{r^{\mu(r)}},$$

et, par conséquent, aussi

$$e^{r^{\mu(r)^{1-\delta}}} < m(r) < e^{r^{\mu(r)^{1+\delta}}},$$

le nombre positif $\delta$ étant aussi petit que l'on voudra ; l'inégalité à droite est satisfaite à partir d'une valeur de $r$, et l'inégalité à gauche pour une infinité de valeurs de $r$ croissant indéfiniment.

La fonction $\mu(r)$ ainsi construite moyennant les fonctions-types $\mu_1(r)$, $\mu_2(r)$, $\mu_3(r)$, ..., peut naturellement être appelée *ordre* de l'algébroïde multiforme $u = \varphi(z)$ définie par l'équation (1).

5. Nous terminons par cette remarque que les formules (7) et (11) nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsque $r$ prend toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'infini, le rapport*

$$\frac{m(r)}{\mathrm{M}(r)}$$

*reste compris entre deux nombres positifs et fixes $\alpha$ et $\beta$.* — Le nombre $\alpha$ ne dépend que du nombre des branches de l'algébroïde multiforme considérée, tandis que le nombre $\beta$ peut être égal à un nombre quelconque plus grand que l'unité pour les valeurs suffisamment grandes de $r$. Donc, au point de vue asymptotique, le nombre $\beta$ ne dépend pas du nombre de branches : il est le même pour toutes les fonctions algébroïdes.