BULLETIN DE LA S. M. F.

L. ZORETTI

Sur l'intégration des équations du mouvement intérieur d'un solide élastique isotrope de révolution

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 52-57
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__52_1>

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT INTÉRIEUR D'UN SOLIDE ÉLASTIQUE ISOTROPE DE RÉVOLUTION;

PAR M. L. ZORETTI.

Les équations du mouvement d'un solide isotrope sont les suivantes :

$$
\text{(I)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\,\Delta\mathbf{u} &= \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial f^2},\\
(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\,\Delta\mathbf{v} &= \rho\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial f^2},\\
(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\,\Delta\mathbf{w} &= \rho\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial f^2},\\
\theta &= \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} + \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial z},
\end{aligned}
\right.
$$

u, **v**, **w** désignant la vitesse de déformation au point x, y, z au temps t.

Si l'on suppose le corps de révolution autour de Oz, et si les conditions initiales et aux limites sont les mêmes tout le long d'un parallèle quelconque de la surface, on peut admettre que la déformation en un point rencontre l'axe de révolution. Si donc l'on pose

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$

on peut supposer que **w** dépend de r, de z et de t seulement et qu'on a aussi

$$\mathbf{u} = f(r, z, t)\cos\varphi,$$
$$\mathbf{v} = f(r, z, t)\sin\varphi.$$

Le système initial devient, en éliminant θ, un système de deux équations aux fonctions inconnues f et **w**. Des calculs élémentaires donnent le système ci-dessous :

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)\left[\dfrac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial r\,\partial z}+\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial f}{\partial r}+\dfrac{f}{r}\right)\right]+\mu\left(\Delta f+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r}-\dfrac{f}{r^2}\right)=\rho\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \\ \mu\,\Delta\mathbf{w}+(\lambda+\mu)\left[\dfrac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial z^2}+\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{f}{r}+\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)\right]=\rho\dfrac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2}, \end{cases}$$

Δf, $\Delta\mathbf{w}$ se rapportant aux dérivées par rapport à r et z. Remarquons alors que les termes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{f}{r^2}$$

qui figurent dans la première équation, désignent la dérivée par rapport à r de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial r}+\dfrac{f}{r}$. Il sera donc bien naturel de poser

$$\psi = \frac{f}{r}+\frac{\partial f}{\partial r}.$$

Nous aurons alors les trois équations suivantes :

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \psi = \dfrac{f}{r}+\dfrac{\partial f}{\partial r}, \\ (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial\psi}{\partial r}+(\lambda+\mu)\dfrac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial r\,\partial z}+\mu\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\rho\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \\ \mu\,\Delta\mathbf{w}+(\lambda+\mu)\left(\dfrac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial z^2}+\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right)=\rho\dfrac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Nous allons essayer de les intégrer dans le cas particulier obtenu en assujettissant f à une condition supplémentaire, visiblement choisie dans le but de simplifier la deuxième équation (III). Supposons que f vérifie l'équation

$$\mu \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

La deuxième équation (III) nous indique alors que l'expression

$$(\lambda + 2\mu)\psi + (\lambda + \mu)\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}$$

est indépendante de r. Or l'équation de condition à laquelle f est assujettie donne, en posant

$$u = z\sqrt{\rho} - t\sqrt{\mu},$$
$$v = z\sqrt{\rho} + t\sqrt{\mu},$$
$$f(r, z, t) = F(u, r) + G(v, r),$$

F et G étant des fonctions arbitraires de leurs arguments. Nous poserons ensuite

$$(4) \qquad (\lambda + 2\mu)\psi + (\lambda + \mu)\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = g(z, t),$$

g étant également une fonction arbitraire.

La première équation (III) donne ψ. La deuxième donne alors $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}$, c'est-à-dire $\mathbf{w}$ à une fonction arbitraire près de r et de t, soit $A(r, t)$. Il reste simplement à voir si ces fonctions arbitraires permettent de satisfaire identiquement à la troisième équation (III). Gardons provisoirement ψ dans le calcul et développons la troisième équation (III). Elle donne d'abord

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial r^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \psi}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2};$$

puis, comme on a

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{\lambda + 2\mu}\left[\frac{\partial g}{\partial z} - (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial z^2}\right],$$

elle donne encore, après réductions,

$$(5) \quad \mu(2\lambda + 3\mu)\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial z^2} + \mu(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial r^2} - \rho(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

L'équation (4) donne ensuite

$$(\lambda+\mu)[\mathbf{w}-A(r,t)] = \int g(z,t)\,dz - (\lambda+2\mu)\int \psi\,dz.$$

Tirons de là les expressions des trois dérivées secondes qui figurent dans (5) :

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial z^2} = \frac{\partial g}{\partial z} - (\lambda+2\mu)\frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad \text{(déjà obtenue)},$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial r^2} = (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - (\lambda+2\mu)\int \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\,dz,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \int \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\,dz - (\lambda+2\mu)\int \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\,dz.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (5). En réduisant, on obtient

$$(6) \quad 0 = (\lambda+2\mu)\frac{\partial g}{\partial z} - \mu(2\lambda+3\mu)\frac{\partial \psi}{\partial z} + (\lambda+\mu)\left(\mu\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \rho\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right)$$
$$- \rho\int \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\,dz - (\lambda+2\mu)\int\left(\mu\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \rho\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)dz.$$

Considérons la partie qui ne contient pas A, c'est-à-dire les deux premiers et les deux derniers termes. Écrivons que la dérivée par rapport à z de ces quatre termes est nulle : ils ne dépendront alors que de r et de t. Cela donne la condition

$$(7) \qquad (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - \mu(2\lambda+3\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \rho\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$
$$- (\lambda+2\mu)\left(\mu\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \rho\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = 0.$$

Nous choisirons d'abord $g(z, t)$ de façon que

$$(8) \qquad (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - \rho\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0.$$

Pour simplifier la suite du calcul, posons encore

$$\frac{F}{r} + \frac{\partial F}{\partial r} = B(r, u),$$

$$\frac{G}{r} + \frac{\partial G}{\partial r} = C(r, v).$$

Donc on a

$$\psi = \frac{F+G}{r} + \frac{\partial}{\partial r}(F+G) = B + C,$$

Remarquons aussi que

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sqrt{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = \sqrt{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right).$$

On en déduit les valeurs suivantes pour les dérivées secondes de ψ :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial r^2};$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \sqrt{\rho}\left(\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial C}{\partial v}\right); \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \sqrt{\mu}\left(\frac{\partial C}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u}\right);$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \rho\left(\frac{\partial^2 B}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial v^2}\right); \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \mu\left(\frac{\partial^2 C}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\right).$$

Et l'équation (7) devient, en tenant compte de (8),

$$\rho\mu(2\lambda + 3\mu)\left(\frac{\partial^2 B}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial v^2}\right) + \mu(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}\right)$$
$$- \rho\mu(\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 B}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial v^2}\right) = 0,$$

ou encore

$$\rho(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 B}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial v^2}\right) + (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}\right) = 0,$$

qu'on peut vérifier en prenant

$$(9) \qquad \begin{cases} \rho(\lambda + \mu)\dfrac{\partial^2 B}{\partial u^2} + (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial^2 B}{\partial r^2} = 0, \\ \rho(\lambda + \mu)\dfrac{\partial^2 C}{\partial v^2} + (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial^2 C}{\partial r^2} = 0. \end{cases}$$

Connaissant B et C, on calcule aisément F et G, car on a

$$B = \frac{F}{r} + \frac{\partial F}{\partial r},$$

d'où

$$rB = F + r\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(Fr).$$

Donc on a

$$Fr = \int rB(r, u)\,dr + F_1(u),$$

et de même

$$Gr = \int rC(r, v)\,dr + G_1(v).$$

Le problème est donc ramené à l'intégration des équations (8) et (9), et de l'équation (6) qu'on peut supposer se réduire à

$$\mu \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \rho \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \tag{10}$$

ce qui détermine la fonction arbitraire de r et de t qui figure dans l'intégrale $\int \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} dz$ par exemple.

L'équation des cordes vibrantes, à laquelle on est ramené, se rencontre, comme on sait, dans la solution grossière, mais pratiquement bonne, et surtout très simple que M. Aliévi a donnée au problème des coups de bélier. Le calcul précédent, qui introduit un certain nombre de fonctions arbitraires, permet peut-être d'étudier la déformation de l'enveloppe en considérant la solution de M. Aliévi comme fournissant des conditions aux limites pour ce dernier problème.