G. RÉMOUNDOS

Contribution au problème de la représentation uniforme des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 79-84
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__79_0>

CONTRIBUTION AU PROBLÈME DE LA REPRÉSENTATION UNIFORME DES SURFACES;

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.

1. Il est bien connu que le problème de la représentation uniforme des courbes à l'aide de fonctions uniformes n'ayant que des points singuliers essentiels isolés est complètement résolu. La solution définitive est due à M. Picard (*Bulletin des Sciences mathématiques* et *Acta mathematica*, t. XI, 1883), qui a démontré que seulement les courbes de genre *zéro* et *un* sont susceptibles d'une telle représentation.

Un problème analogue se pose pour les surfaces, c'est-à-dire : *Trouver toutes les surfaces telles que les coordonnées x, y, z puissent s'exprimer par trois fonctions uniformes de deux variables complexes, ayant partout à distance finie le caractère d'une fonction rationnelle.*

En d'autres termes, ces fonctions doivent être uniformes et algébroïdes partout à distance finie, et peuvent s'appeler aussi *méromorphes*, comme dans le cas d'une variable indépendante. Ce problème, qui est très difficile, a été proposé par l'Académie des Sciences de Paris (grand Prix des Sciences mathématiques pour l'année 1910).

Je me propose d'exposer ici quelques résultats concernant une classe de surfaces pour lesquelles la possibilité d'une représentation uniforme méromorphe se ramène à la possibilité d'une même représentation pour une surface de la forme

$$z^2 = \sigma(x, y)$$

ou bien entraîne pour cette surfaee une représentation remarquable à points critiques, appartenant à un ensemble déterminé.

2. Supposons que la surface

$$\begin{aligned}(1)\qquad f(x, y, z) = \sigma_0(x, y) + z\sigma_1(x, y)\\ + z^2\sigma_2(x, y) + \ldots + z^\mu\sigma_\mu(x, y) = 0\end{aligned}$$

soit susceptible de la représentation paramétrique

$$(2) \qquad x = M_1(u, v), \qquad y = M_2(u, v), \qquad z = M_3(u, v),$$

les fonctions $M_1(u, v)$, $M_2(u, v)$, $M_3(u, v)$ étant uniformes *entières* (c'est-à-dire développables en série de Taylor partout à distance finie). Supposons que la fonction $\sigma_1(x, y)$ soit nulle identiquement et que les quotients $\frac{\sigma_3(x, y)}{\sigma_0(x, y)}, \frac{\sigma_4(x, y)}{\sigma_0(x, y)}, \ldots, \frac{\sigma_\mu(x, y)}{\sigma_0(x, y)}$ soient des polynomes entiers par rapport à x et y, et posons

$$(3) \quad \sigma_3 = \sigma_0 A_3(x, y), \qquad \sigma_4 = \sigma_0 A_4(x, y), \qquad \ldots, \qquad \sigma_\mu = \sigma_0 A_\mu(x, y).$$

Alors, l'équation de la surface prend la forme

$$(4) \quad \begin{aligned} &\sigma_0(x, y) + \sigma_2(x, y) z^2 + \sigma_0(x, y) \\ &\quad \times [A_3(x, y) z^3 + A_4(x, y) z^4 + \ldots + A_\mu(x, y) z^\mu] = 0 \end{aligned}$$

ou bien

$$(5) \quad \begin{aligned} &q_0(u, v) + q_2(u, v) z^2 + q_0(u, v) \\ &\quad \times [B_3(u, v) z^3 + B_4(u, v) z^4 + \ldots + B_\mu(u, v) z^\mu] = 0, \end{aligned}$$

si nous faisons dans la première la substitution $x = M_1(u, v)$, $y = M_2(u, v)$; les fonctions entières $q_0(u, v)$, $q_2(u, v)$, $B_i(u, v)$ sont celles que nous obtenons en faisant la substitution $x = M_1(u, v)$, $y = M_2(u, v)$ dans les polynomes $\sigma_0(x, y)$, $\sigma_2(x, y)$, $A_i(x, y)$.

Cela posé, supposons que le système algébrique

$$(6) \qquad \sigma_0(x, y) = 0, \qquad \sigma_2(x, y) = 0$$

n'admette aucune solution; alors, il en sera de même du système

$$(7) \qquad q_0(u, v) = 0, \qquad q_2(u, v) = 0,$$

parce que, si le second avait la solution $u = u_0$, $v = v_0$, le premier admettrait la solution

$$x = x_0 = M_1(u_0, v_0), \qquad y = y_0 = M_2(u_0, v_0).$$

Considérons une solution $u = u_0$, $v = v_0$ de l'équation

$$(8) \qquad q_0(u, v) = 0;$$

à ces valeurs des u et v ne correspond que la valeur $z = 0$ de la fonction $z = M_3(u, v)$, comme il résulte de l'équation (5), qui est évidemment satisfaite par cette fonction. Écrivons maintenant l'équation (5) sous la forme

$$(9) \quad \sqrt{q_0(u, v)} = z\sqrt{-q_2(u, v) - q_0(u, v)[B_3 z + B_4 z^2 + \ldots + B_\mu z^{\mu-2}]},$$

et remarquons que le second membre de cette égalité devient pour $z = \theta(u, v)$ une fonction uniforme dans le voisinage de $u = u_0$ et $v = v_0$, parce que d'une part nous avons

$$q_0(u_0, v_0) = o, \qquad q_2(u_0, v_0) \neq o,$$

et d'autre part les z, B_3, B_4, ..., B_μ sont des fonctions entières des u et v et ne prennent que des valeurs finies à distance finie. Il en résulte que le premier membre $\sqrt{q_0(u, v)}$ sera aussi uniforme dans le voisinage de $u = u_0$ et $v = v_0$; par conséquent, l'annulation de la fonction $q_0(u, v)$ ne comporte aucune singularité critique, et, comme la même fonction est finie à distance finie, nous en concluons que chaque branche de la racine $\sqrt{q_0(u, v)}$ est une fonction partout uniforme (dans tout le plan de u et de v), et, par conséquent, chaque branche est une fonction entière (partout régulière).

Nous arrivons donc à la conclusion finale que la surface

$$(10) \qquad z^2 = \sigma_0(x, y)$$

admet aussi une représentation uniforme

$$x = M_1(u, v), \qquad y = M_2(u, v), \qquad z = H(u, v),$$

$H(u, v)$ étant une nouvelle fonction entière.

3. Nous obtenons donc le théorème suivant, concernant toutes les surfaces

$$f(x, y, z) = o$$

ayant les trois propriétés suivantes :

1° La dérivée partielle $f'_z(x, y, z)$ est identiquement nulle pour $z = o$; 2° le système formé par les deux équations

$$f(x, y, o) = o, \qquad f''_{z^2}(x, y, o) = o$$

n'admet aucune solution; 3° les quotients

$$\frac{f'''_{z^3}(x, y, o)}{f(x, y, o)}, \quad \frac{f^{IV}_{z^4}(x, y, o)}{f(x, y, o)}, \quad \ldots$$

sont des polynomes entiers par rapport à x et y.

Théorème. — *Si une telle surface admet une représentation uniforme à l'aide de fonctions entières*

$$x = M_1(u, v), \qquad y = M_2(u, v), \qquad z = M_3(u, v),$$

il en est de même de la surface

$$z^2 = f(x, y, o),$$

qui admet la représentation paramétrique

$$x = M_1(u, v), \qquad y = M_2(u, v), \qquad z = H(u, v),$$

la fonction $H(u, v)$ *étant aussi entière.*

Il est bien entendu que les trois restrictions ci-dessus imposées à l'équation de la surface peuvent être vérifiées pour une valeur quelconque de z, puisque toute valeur se ramène à la valeur $z = o$ par une transformation qui ne change pas la nature de la représentation paramétrique.

GÉNÉRALISATIONS.

4. On comprend bien l'intérêt du théorème ci-dessus énoncé, si l'on tient compte de ce que le problème de la représentation uniforme des surfaces algébriques n'a pas encore eu de solution complète. Nous ne connaissons pas, en effet, toutes les surfaces algébriques susceptibles d'une représentation uniforme à l'aide de fonctions méromorphes ou entières; en dehors des surfaces hyperelliptiques et, en général, des surfaces de M. Picard [voir E. Picard, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II, p. 465, note I], jouissant de la propriété d'être satisfaites par des fonctions uniformes méromorphes appartenant à une classe de transcendantes nouvelles [*Voir* aussi : *Acta mathematica*, t. XVIII et XXIII, *Sur une classe de transcen-*

dantes nouvelles] découvertes par M. Picard, nous ne savons pas s'il en existe d'autres; *a priori*, donc, il faut étudier le problème de l'existence de surfaces algébriques, susceptibles d'être satisfaites par trois fonctions uniformes *entières*.

Considérons maintenant le cas général où les polynomes $\sigma_0(x,y)$ et $\sigma_2(x,y)$ [*voir* l'équation (4) de la surface] peuvent s'annuler simultanément par quelques systèmes de valeurs de x et y, par exemple, par (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ...; dans ce cas, nous ne pouvons pas conclure que la surface

$$z^2 = \sigma_0(x, y) \tag{11}$$

est aussi susceptible d'une représentation paramétrique uniforme à l'aide de fonctions *entières;* mais la théorie exposée dans ce travail nous permet d'obtenir un théorème général comprenant comme cas particulier celui que nous avons énoncé dans le Chapitre précédent.

Théorème général. — *Si nous appelons* (E) *l'ensemble des solutions par rapport à u et v des systèmes algébriques*

$$\left\{\begin{array}{llll} x_0 = M_1(u, v), & x_1 = M_1(u, v), & x_2 = M_1(u, v), & \ldots, \\ y_0 = M_2(u, v), & y_1 = M_2(u, v), & y_2 = M_2(u, v), & \ldots, \end{array}\right. \tag{12}$$

la surface (11) *est susceptible de la représentation paramétrique suivante :*

$$x = M_1(u, v), \qquad y = M_2(u, v), \qquad z = P(u, v),$$

où la fonction $P(u, v)$ *ne saurait avoir d'autres singularités critiques que les valeurs de u et v appartenant à l'ensemble* (E).

Pour nous rendre mieux compte de l'intérêt de cette généralisation, posons

$$u = u_1 + i u_2, \qquad v = v_1 + i v_2,$$

et remarquons que les variables réelles u_1, u_2, v_1, v_2 peuvent représenter les coordonnées d'un point de l'espace à quatre dimensions; ainsi, à chaque système de valeurs de u et v correspond un point de l'espace à quatre dimensions. L'utilité du théorème général tient à ce que l'ensemble (E) est *dénombrable*, tandis que, en général, l'ensemble des points singuliers d'une fonction $z = f(u, v)$, déterminée par une équation

$$z^2 = \varphi_0(x, y),$$

où l'on remplace les x et y par des fonctions quelconques des u et v, est continu.

5. Nous tenons à citer aussi une autre généralisation d'une autre espèce.

A cet effet, considérons une surface ayant comme équation

$$\sigma_0(x, y) + \sigma_m(x, y)\, z^m + \sigma_{m+1}(x, y)\, z^{m+1} + \ldots + \sigma_\mu(x, y)\, z^\mu = 0$$

et admettant une représentation paramétrique à l'aide de fonctions uniformes *entières*

$$x = M_1(u, v), \qquad y = M_2(u, v), \qquad z = M_3(u, v).$$

Si nous supposons que le système algébrique

$$\sigma_0(x, y) = 0, \qquad \sigma_m(x, y) = 0$$

n'ait pas de solutions, notre théorie exposée dans le Chapitre précédent montre d'une façon identique que la surface

$$z^m = \sigma_0(x, y)$$

admettra aussi une représentation paramétrique de même nature,

$$x = M_1(u, v), \qquad y = M_2(u, v), \qquad z = H(u, v),$$

$H(u, v)$ désignant une nouvelle fonction entière, dans le cas où les quotients $\frac{\sigma_{m+1}(x, y)}{\sigma_0(x, y)}, \frac{\sigma_{m+2}(x, y)}{\sigma_0(x, y)}, \ldots, \frac{\sigma_\mu(x, y)}{\sigma_0(x, y)}$ sont des polynomes par rapport à x et y.