BULLETIN DE LA S. M. F.

E. PICARD

Sur les systèmes de deux fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 201-205

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__201_0>

SUR LES SYSTÈMES DE DEUX FONCTIONS UNIFORMES D'UNE VARIABLE LIÉES PAR UNE RELATION ALGÉBRIQUE;

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. Mon attention s'est reportée récemment sur une proposition générale que j'ai donnée jadis ([1]), d'après laquelle *il ne peut exister de relation algébrique de genre supérieur à un entre deux fonctions uniformes d'une variable ayant un point singulier essentiel isolé.*

Comme je viens de l'indiquer dans les *Comptes rendus* ([2]), la méthode suivie peut être utilisée pour démontrer une proposition analogue à celle par laquelle M. Landau a généralisé, en 1904, mon premier théorème sur les fonctions entières. J'ai obtenu ainsi la proposition suivante :

Soit

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

une courbe de genre au moins égal à deux. Considérant un point (a, b) de cette courbe, on met à la place de x, dans l'équation (1), une fonction méromorphe de z dans un certain domaine autour de l'origine, dont le développement taylorien dans le voisinage de $z = 0$ est donné par la formule

$$x = a + a_1 z + \ldots.$$

On tire de (1) la fonction y de z, prenant pour $z = 0$ la valeur b. *Les deux fonctions x et y de z ne pourront être simultanément méromorphes dans un cercle ayant l'origine pour centre et un rayon supérieur à $\mathrm{R}(a, a_1)$, expression qui dépend seulement de a et de a_1, et nullement des autres coefficients du développement de x.*

Cet énoncé, qui présente une analogie évidente avec la propo-

([1]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1883, et *Acta mathematica*, t. XI, 1887.

([2]) *Comptes rendus*, 15 janvier 1912.

sition de M. Landau, en diffère par le fait qu'il n'y a pas à envisager ici de valeurs exceptionnelles.

2. Le théorème précédent peut être généralisé en utilisant, au lieu de la fonction $\lambda(x, y)$ de ma Communication des *Comptes rendus*, une autre fonction de même nature. Je rappelle que, étant envisagée la courbe (1) de genre au moins égal à deux, il résulte de la théorie des fonctions fuchsiennes de M. Poincaré qu'on peut former une fonction $\lambda(x, y)$ du point analytique (x, y), holomorphe dans le voisinage de tout point de la surface de Riemann correspondant à (1), et pour laquelle le coefficient de i est toujours positif. Les diverses déterminations de $\lambda(x, y)$ se déduisent d'ailleurs de l'une d'elles par des substitutions linéaires et, de plus, l'inversion de λ conduit à exprimer x et y par des fonctions automorphes.

Au lieu d'employer la fonction $\lambda(x, y)$ dans les raisonnements, on peut utiliser une fonction $\pi(x, y)$ jouissant de propriétés analogues, sauf qu'elle admettra sur la surface de Riemann des points singuliers de nature logarithmique

$$(2) \qquad (\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha_2, \beta_2), \quad \ldots, \quad (\alpha_q, \beta_q),$$

l'entier q étant quelconque.

Considérons maintenant deux fonctions x et y d'une variable z, satisfaisant à (1), méromorphes à l'intérieur du cercle C de rayon R ayant l'origine pour centre, et telles que le point (x, y) ne coïncide dans ce cercle avec aucun des points (α_h, β_h) de la suite (2). Substituons alors dans la fonction $\pi(x, y)$, à la place de x et y, les fonctions méromorphes de z dont il vient d'être parlé; la fonction π devient une fonction de z, holomorphe dans le cercle C, et le coefficient de i dans cette fonction est positif.

Il n'y a plus alors qu'à raisonner comme dans ma Note citée pour voir que *le rayon* R *est inférieur à une certaine fonction de a et de a_1*, en désignant toujours par

$$x = a + a_1 z + \ldots$$

le développement taylorien de x dans le voisinage de $z = 0$.

En particulier, les q points (α, β) peuvent être les n points à l'infini de la courbe (supposée de degré n), et alors les fonctions envisagées x et y sont *holomorphes* dans le cercle C.

On remarquera que si $q = 0$, on a le théorème des *Comptes rendus*. Si la courbe était de genre zéro (cas exclu), le nombre q serait au moins égal à trois, et l'on aurait le théorème de M. Landau.

3. Indiquons une autre conséquence du même genre d'analyse dans un ordre d'idées différent. Divers géomètres ont indiqué d'importants théorèmes sur la convergence des suites des fonctions (¹). En laissant de côté le théorème élémentaire de Weierstrass, nous avons d'abord le théorème donné par Stieltjes dans son célèbre Mémoire sur les fractions continues, qui n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'un théorème plus récent de M. Vitali, susceptible d'être ainsi formulé : soient les fonctions

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots$$

holomorphes dans le cercle C de rayon *un*, et telles que l'on ait, quel que soit n,

$$|f_n(z)| < g,$$

g étant un nombre fixe. On suppose que $f_n(z)$ ait une limite pour une infinité de points de C ayant au moins un point de condensation à l'intérieur de C. *Dans ces conditions, $f_n(z)$ a une limite pour tous les points de l'intérieur du cercle, et cette limite est une fonction holomorphe de z à l'intérieur de* C.

Dans leur Mémoire cité, MM. Carathéodory et Landau font connaître un théorème remarquable pour lequel l'énoncé est celui de M. Vitali, *sauf que la condition*

$$|f_n(z)| < g$$

est remplacée par la condition qu'aucune des fonctions $f_n(z)$ ne prend dans le cercle C *les valeurs a et b (a et b étant deux constantes distinctes).*

(¹) *Voir*, pour la bibliographie, un Mémoire récent de MM. Carathéodory et Landau [*Beiträge zur Convergenz von Funktionenfolgen* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin*, 18 mai 1911)]. On consultera aussi sur ce sujet deux importantes Notes de M. Montel (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 20 novembre et 26 décembre 1911).

4. Nous devons nous attendre à avoir, dans le domaine des courbes *de genre supérieur à un*, un théorème analogue à celui de MM. Carathéodory et Landau, *mais où l'énoncé n'aura pas à envisager des valeurs exceptionnelles.*

Reprenant la courbe (1), soient

$$(x_1, y_1), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n), \quad \ldots$$

des couples de fonctions de la variable z, méromorphes dans un cercle C ayant l'origine pour centre et satisfaisant à l'équation (1). Nous allons établir le théorème suivant :

Si le couple (x_n, y_n) a une limite pour une infinité de points de C possédant au moins un point de condensation à l'intérieur de C, le couple (x_n, y_n) aura une limite pour tous les points de l'intérieur de C, et les coordonnées de ce couple limite sont des fonctions méromorphes de z.

Il suffira de reprendre la fonction $\lambda(x, y)$ dont nous avons parlé plus haut, ou plutôt la combinaison déjà utilisée

$$\frac{\lambda(x, y) - \lambda(a, b)}{\lambda(x, y) - \lambda_0(a, b)},$$

en désignant par (a, b) un point déterminé de la courbe, et représentant par $\lambda_0(a, b)$ la quantité conjuguée de $\lambda(a, b)$.

La fonction de z

$$\frac{\lambda(x_n, y_n) - \lambda(a, b)}{\lambda(x_n, y_n) - \lambda_0(a, b)}$$

est une fonction $G_n(z)$ holomorphe dans le cercle C, et dont le module est inférieur à l'unité. Nous obtenons ainsi une infinité de fonctions

$$G_1(z), \quad G_2(z), \quad \ldots, \quad G_n(z), \quad \ldots$$

holomorphes dans C et pour lesquelles

$$|G_n(z)| < 1.$$

On peut alors leur appliquer le théorème de M. Vitali, puisque $G_n(z)$, comme le couple (x_n, y_n), a une limite pour une infinité de points du cercle C possédant au moins un point de condensation dans C. De la limite de G_n se déduit de suite l'existence de la limite du couple (x_n, y_n), puisque l'inversion de λ se fait d'une manière uniforme. Le reste de la démonstration est immédiat.

5. On pourrait multiplier les exemples d'extension aux courbes de genre supérieur à *un* de résultats établis pour une seule fonction uniforme. Ce que ces extensions présentent de curieux, c'est que des énoncés, où devait être admise l'existence de valeurs exceptionnelles, ne portent plus trace de valeurs de cette nature.