BULLETIN DE LA S. M. F.

J. A. DE SÉGUIER

Sur les produits directs

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 219-223
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__219_1>

SUR LES PRODUITS DIRECTS;

PAR M. DE SÉGUIER.

On connaît la propriété invariante des bases d'un groupe abélien d'ordre fini. Dans le Tome 139 du *Journal de Crelle* (p. 293-308), M. Remak a fait connaître une propriété invariante plus générale appartenant à tout produit direct. Le théorème ayant une forme bien classique, il ne sera peut-être pas inutile d'en donner une démonstration plus simple. Cette démonstration résulte, d'ailleurs, d'une remarque ayant, par elle-même, quelque intérêt sur les diviseurs maximum des produits directs [1].

1. Soit A le produit direct des groupes $A_1, \ldots, A_n$ (A_i sera dit *facteur direct* de A, et *réduit* s'il n'est pas produit direct). *Si* $\Pi_1^n a_i = \Pi_1^n \alpha_i$, *$a_i$ et α_i étant dans* A_i, *a_i coïncide avec α_i*, car $a_1 \alpha_1^{-1}$ par exemple, étant dans $\Pi_2^n A_i$, est égal à 1. *Si donc* $\Pi_1^n a_i$ *est permutable à* $\Pi_1^n a'_i$, *a'_i étant dans* A_i, *a_i l'est à a'_i.*

---

(1) Je me servirai, dans ce qui suit, de la même terminologie et des mêmes notations que dans mes *Éléments de la théorie des groupes abstraits* (Paris, 1904) et dans mes *Éléments de la théorie des substitutions* (Paris, 1912). On en trouvera un index à la fin du second Ouvrage.

Si le groupe $G = \Sigma g (g = \Pi_1^n g_i$, g_i *étant dans* A_i(1) *divise* A, *le p. g. c. d.* D_i *de* G, A_i *est normal dans* $\mathcal{A}_i = \Sigma g_i$ ($\mathcal{A}_i$ sera dit le *constitutif de* G *dans* A_i), car le p. g. c. d. $g_i^{-1} D_i g_i$ de $g^{-1} \Pi_1^n D_k g$ ($\leqq G$) avec A_i est $\leqq D_i$. *De plus* $\mathcal{A}_i | D_i \equiv G | \Pi_1^n D_k$ (2).

Si $n = 2$, *et si* $D_1 = A_1$, G, contenant évidemment $\mathcal{A}_2$, *est le produit direct de* A_1 *par* $\mathcal{A}_2 = D_2$.

Si G *divise le central* A_0 *de* A, $\mathcal{A}_i$ *divise celui* A_{i0} *de* A_i, *d'où* $A_0 = \Pi A_{i0}$.

Ces remarques n'ont, d'ailleurs, rien de nouveau.

2. Il est clair que $\Pi \mathcal{A}_i$ est $\geqq G \geqq \Pi D_i$. Soit $D_{ik\ldots l}$ le p. g. c. d. de G avec $A_i A_k \ldots A_l$, et $\mathcal{A}_{ik\ldots l}$ le constitutif de G dans $A_i A_k \ldots A_l$. *Pour* $k < n$, $D_{12\ldots k} = \Pi_1^k D_i$ ($D_{1\ldots n} = G$), car $\mathcal{A}_n | D_n$ est isomorphe d'une part à $G | \Pi_1^n D_i$ et d'autre part, en prenant $\mathcal{A}_{1\ldots k}$, $\mathcal{A}_{k+1}$, ..., $\mathcal{A}_n$ pour constitutifs de G, à $G | D_{1\ldots k} \Pi_{k+1}^n D_i$. De plus, *si* $G < A$, $\mathcal{A}_{ik}$ *ne peut pas être égal à* $A_i A_k$ *quels que soient* i *et* k. Cela est clair si $n = 2$. Soit $n > 2$. L'équation $A_i A_k | D_i D_k = A_l | D_l$ (i, k, l étant distincts) donne, en désignant les ordres de A_i, D_i par α_i, δ_i, $\frac{\alpha_i \alpha_k}{\delta_i \delta_k} = \frac{\alpha_l}{\delta_l}$, d'où, en permutant i, k, l et en multipliant, $\alpha_i \alpha_k \alpha_l = \delta_i \delta_k \delta_l$. Donc δ_i serait égal à α_i pour $i = 1, \ldots, n$, et G à A.

Si $\mathcal{A}_1$ est $< A_1$, G est $\leqq \mathcal{A}_1 \Pi_2^n A_i < A$. Supposons que $\mathcal{A}_i = A_i$ quel que soit i, et soit $A_{12} < A_1 A_2$. Si alors $\mathcal{D}_i$ est le p. g. c. d. de $\mathcal{A}_{12}$ avec A_i, $\mathcal{D}_i$ est $< A_i$ (1). Donc *a fortiori* D_1 est $< A_1$ et $D_2 < A_2$ (D_1 est $\leqq \mathcal{D}_1$ et $D_2 \leqq \mathcal{D}_2$). Donc G est $\leqq \mathcal{A}_{12} A_3 \ldots A_n < A$. *Si donc* G *est maximum dans* A, *il est, ou de la forme* $B \Pi_2^n A_i$, B *étant maximum dans* A_1, *ou de la forme* $C \Pi_3^n A_i$, C *étant maximum dans* $A_1 A_2$ *et ayant pour constitutifs* A_1 *et* A_2.

Si de plus A_1 *et* A_2 *sont réduits*, C *est réduit*. En effet, $A_1 | D_1 \equiv A_2 | D_2$ est ici simple (3). Donc D_1 est $\geqq A_{10}$ et $D_2 \geqq A_{20}$. Supposons C produit direct de C′ et C″, et soient $\mathcal{A}'_i$, $\mathcal{A}''_i$ les cons-

---

(1) G est ici représenté comme la somme symbolique de ses éléments.

(2) *Voir*, par exemple, le n° 27 des *Éléments de la théorie des substitutions*, ou le n° 65 des *Éléments de la théorie des groupes abstraits*. La représentation de A obtenue en remplaçant chaque A_i par une de ses représentations transitives facilite beaucoup l'étude actuelle.

(3) *Loc. cit.*

titutifs respectifs de C' et C'' dans A_i. Le constitutif A_i de C est alors $\mathcal{A}'_i\mathcal{A}''_i$, et, les éléments de $\mathcal{A}'_i$ étant permutables à ceux de $\mathcal{A}''_i$, le p. g. c. d. $\mathcal{D}_i$ de $\mathcal{A}'_i$, $\mathcal{A}''_i$ est $\leqq A_{i0} \leqq D_i$. Or soit $c' = a'_1 a'_2$, un élément de C' et $c'' = a''_1 a''_2$ un élément de C'', a'_i étant dans $\mathcal{A}'_i$ et a''_i dans $\mathcal{A}''_i$. $\mathcal{D}_1$ étant $\leqq D_1$, on peut former un élément $c'c''$ de C où a'_1 et a''_1 sont arbitraires dans $\mathcal{D}_1$ et $a'_2 a''_2 = 1$. Or si $\mathcal{D}_1$ est > 1, on peut y prendre $a''_1 = a'^{-1}_1 \neq 1$, d'où $c'' = c'^{-1} \neq 1$, ce qui ne se peut. Donc $\mathcal{D}_i = 1$. Mais alors, ou bien A_i serait produit direct, ou bien l'on aurait, par exemple, $\mathcal{A}'_2 = \mathcal{A}''_1 = 1$ et $c = \mathcal{A}'_1\mathcal{A}''_2$, contre les hypothèses.

3. Soit $A' = \Pi_1^{n'} A'_i$ (les A'_i étant facteurs directs) un groupe isomorphe à A, les A_i et les A'_i pouvant n'être pas réduits. Si, dans l'isomorphisme considéré, $a' = \Pi a'_i$ (a'_i étant dans A'_i) répond à $a = \Pi a_i$ (a_i étant dans A_i), on obtient un homomorphisme de A'_k à A_i en faisant correspondre a'_k à a_i. Cet homomorphisme peut, d'ailleurs, n'être pas isomorphique, même si $A'_k \equiv A_i$. Ainsi, pour $n = n' = 2$, $A_1 = \{\alpha, \beta\}$ $(\alpha^2 = \beta^3 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha)$, $A_2 = \{\gamma\}$ $(\gamma^3 = 1)$, $A'_1 = \{\alpha', \beta'\}$ $(\alpha'^2 = \beta'^3 = 1, \alpha'\beta' = \beta'\alpha')$, $A'_2 = \{\gamma'\}$ $(\gamma'^3 = 1)$, $a = \alpha^x\beta^y\gamma^z$ $(a_1 = \alpha^x\beta^y,\ a_2 = \gamma^z)$, $a' = \alpha'^x\beta'^y(\beta'\gamma')^z$ $(a'_1 = \alpha'^x\beta'^{y+z},\ a'_2 = \gamma'^z)$, à chaque $a_1 = \alpha^x\beta^y$ répondent les trois a'_1 $\alpha'^x\beta'^{y+z}$ $(z = 0, 1, 2)$, et à chaque $a'_1 = \alpha'^x\beta'^y$, les trois a_1 $\alpha^x\beta^{y+z}$ $(z = 0, 1, 2)$.

Si $n = n' = 2$, *et si, dans l'isomorphisme de* A à A', A_2 *répond isomorphiquement à* A'_2, la correspondance *de ceux des éléments* a *et* a' *où* $a_2 = a'_2 = 1$ fournit un isomorphisme de A_1 à A'_1 bien que la correspondance *de tous les* a *à tous les* a' puisse ne fournir qu'un homomorphisme non isomorphique de A_1 à A'_1 (l'exemple précédent le montre). Il est clair d'ailleurs qu'à chaque isomorphisme de A_1 à A'_1 et de A_2 à A'_2 répond un isomorphisme de A à A'.

4. Deux divisions X et X' de A sont dits *centralement isomorphes dans* A quand on peut établir entre eux une correspondance isomorphique où l'élément x' de X' qui répond à l'élément x de X est $\equiv x \bmod A_0$ (alors $A_0X = A_0X'$). Une telle correspondance, *effectivement établie*, sera dite abréviativement *correspondance centrale de* X *à* X' *dans* A.

Soit $A' = \Pi_1^{n'} A'_i$ (*les* A'_i *étant facteurs directs*) *un groupe* *centralement isomorphe à* A *dans le produit direct de* A *par un groupe abélien déterminé quelconque* K ($AK = A'K$), *les* A_i *et les* A'_i *étant réduits. Alors* $n' = n$, *et l'on peut établir entre* A *et* A' *une correspondance centrale dans* AK *où chaque* A'_i *correspond centralement à un* A_i *dans* AK.

On peut admettre le théorème quel que soit K pour des groupes A et A' d'ordre moindre. Soit $\mathcal{C}$ une correspondance centrale donnée de A à A' dans AK. Supposons d'abord qu'un A_i tel que A_1 soit centralement isomorphe dans AK à un A'_i tel que A'_1, et soit A″ le groupe déduit de A en y remplaçant A_1 par A'_1. Il résulte immédiatement des équations de A qu'on obtient une correspondance centrale $\mathcal{C}'$ de A″ à A dans AK en remplaçant dans $\mathcal{C}$ chaque élément de A_1 par l'élément de A'_1 qui lui correspond (dans $\mathcal{C}$). Soit $\Pi_1^{n'} a'_i$ (a'_i étant dans A'_i) l'élément de A' qui répond dans $\mathcal{C}'$ à $a'_1 \Pi_2^n a_1$ (a_i étant dans A_i) de A″. La considération des éléments où $a'_1 = 1$ montre que $\Pi_2^n A_i$ répond, dans $\mathcal{C}$ comme dans $\mathcal{C}'$ à $\Pi_2^{n'} A'_i$, et l'on est ramené à des groupes d'ordre moindre.

Supposons donc qu'aucun A_i ne soit centralement isomorphe dans AK à un A'_i. Supposons aussi A_1 d'ordre non premier (si tous les A_i sont d'ordre premier, on peut supposer qu'il en est de même des A'_i, sans quoi on échangerait A et A'; le théorème est alors évident, A et A' ayant le même ordre), et soit B un diviseur maximum de A_1. Alors $G = B\Pi_2^n A_i$ est un diviseur maximum de A_i contenant A_0. Son correspondant par C dans A' a la forme $G' = X\Pi' A'_i$, X étant, ou un diviseur maximum B' de A'_1, ou un diviseur C' de constitutifs A'_1 et A'_2, maximum dans $A'_1 A'_2$ et réduit : Π' s'étend, si $X = B'$, à $A'_2, \ldots, A'_{n'}$, et si $X = C$, à $A'_3, \ldots, A'_{n'}$. Il est clair que $\mathcal{C}$ fournit une correspondance centrale de G à G' dans GKA_0, et le théorème peut être admis relativement à cet isomorphisme central. Or A_n, qui n'est centralement isomorphe dans AK à aucun A'_i, ne l'est, dans $GKA_0 (= G'KA_0)$ à aucun A'_i de Π'. Car si, dans un tel isomorphisme, un élément x de A_n correspondait à un élément $x' = \alpha_1 a_0 x$ de A'_j, a_0 étant dans KA_0 et α_1 dans A_1 hors de A_0, le normalisant de x' dans A' serait d'ordre inférieur à celui de x dans A [pour que $a_1 \ldots a_n$ (a_i étant dans A_i) soit permutable à $\alpha_1 a_0 x$, il faut que a_1 le soit à α_1, et le normalisant de α_1 est $< A_1$]. Donc A_n est centralement isomorphe dans GKA_0 à un facteur direct Δ de X, et AK est produit direct de $A_1, \ldots, A_{n-1}, \Delta$, K. Si alors $X = B' < A'_1, A'_1$, diviseur du produit direct de Δ par $K\Pi_1^{n-1} A_i$ et contenant Δ, n'est pas réduit (1), contre l'hypothèse. Si $X = C' < A'_1 A'_2, C'$, étant réduit, est centralement isomorphe dans GKA_0 à A_n. Donc, si $n > 2$, puisque le théorème est admis pour G et G' dans GKA_0, un des A_i est centralement isomorphe dans AK à un A'_i, contre l'hypothèse. Si $n = 2$, on peut supposer aussi que $n' = 2$ (sans quoi on échangerait A et A'), et l'équation $BA_2 = C'$ donne $B = 1$. Donc A_1 serait d'ordre premier, contre l'hypothèse.